

Tadeusz Sozański

Uniwersytet Jagielloński
Instytut Socjologii

O SILE WYGRYWANIA I BLOKOWANIA W GRACH GŁOSOWANIA

Referat na II Ogólnopolskie Sympozjum
„Fizyka w Ekonomii i Naukach Społecznych”

Kraków, 21-22 kwietnia 2006

<http://www.cyf-kr.edu.pl/~usozans/>

email: usozans@cyf-kr.edu.pl

[Voting Games](#)

[winblock.pdf](#)

[wbabs.pdf](#)

(abstract in English)

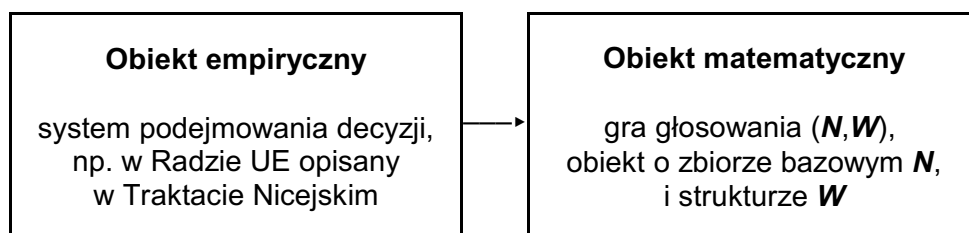
Spis treści

1. POLITOLOGIA MATEMATYCZNA 3
 - 1.1. Cele badawcze politologii matematycznej 3
 - 1.2. Teoria i praktyka, czyli politolog matematyczny jako ekspert 4
2. PODEJMOWANIE DECYZJI PRZEZ GŁOSOWANIE 7
 - 2.1. Składniki ogólnego systemu podejmowania decyzji 7
 - 2.2. Postulaty nałożone na reguły głosowania 8
3. TEORIA GIER GŁOSOWANIA 10
 - 3.1. Trójpodział zbioru koalicji. Koalicje minimalne danego typu 11
 - 3.2. Pojęcie gracza krytycznego 12
 - 3.3. Izomorfizm gier głosowania i parametry strukturalne 12
 - 3.4. Twierdzenia o parametrach strukturalnych 13
 - 3.5. Gry ważonego głosowania 14
 - 3.6. Iloczyn i suma gier głosowania 15
 - 3.7. Rozmiar minimalnych koalicji wygrywających i blokujących 15
 - 3.8. Indeksy siły wygrywania i blokowania 18
4. GRA NICEJSKA 22
 - 4.1. Własności systemu głosowania w UE-15 22
 - 4.2. Trzy warianty gry nicejskiej 24
5. GRA KONSTYTUCYJNA 29
6. KONSTRUOWANIE GIER GŁOSOWANIA NA ZASADZIE KOMPROMISU 34
7. UWAGI KOŃCOWE 36

1. POLITOLOGIA MATEMATYCZNA

1.1. Cele badawcze politologii matematycznej

- Modelowanie matematyczne systemów polityczno-prawnych (ogólniej, dowolnych systemów podejmowania decyzji). Reguły, procedury, przepisy, opisane w *języku prawniczym*, przekłada się na *język matematyczny*.



- Badanie własności *abstrakcyjnych* systemów politycznych zarówno empirycznie zrealizowanych jak i *logicznie możliwych* do zrealizowania. Dla każdej *kategorii* takich systemów buduje się *teorię aksjomatyczną*.
- Projektowanie systemów spełniających pewne wymogi, które (szczególnie w tzw. *teorii wyboru społecznego*) formalnie definiuje się z intencją przełożenia na język matematyczny pojęć (takich jak „równość”, „wolność”, „sprawiedliwość”) pierwotnie eksplikowanych w języku *filozofii prawa i polityki* lub na gruncie jakiejś ideologii.
- Naukowe wyjaśnianie procesów politycznych w tym również konstruowania systemów podejmowania decyzji przez same podmioty polityczne. Analiza procesów (takich jak negocjacje mające doprowadzić do uchwalenia ordynacji wyborczej, systemu głosowania, np. w Radzie UE) może, a nawet powinna uwzględniać cele stawiane sobie przez samych konstruktorów systemów decyzyjnych.

Matematyka wykorzystywana w politologii

Elementarne pojęcia teoriomnogościowe (*zbiór, relacja, odwzorowanie*), trochę kombinatoryki i teorii prawdopodobieństwa. *Teoria gier*

1.2. Teoria i praktyka, czyli politolog matematyczny jako ekspert

List wysłany (pocztą elektroniczną) 21 marca 2006 przez autora do Axela Moberga (członka delegacji szwedzkiej, który brał udział w negocjacjach dotyczących systemu głosowania w UE) w odpowiedzi na jego list z 3 marca 2006 (kursywą zaznaczono cytowane fragmenty)

Dear Axel:

[... Your] story of a *humble civil servant in the delegation* which reads

Some delegations did indeed have Voting Power calculations of various proposals (I have tried to cheer up Moshe Machover in this respect). If they understood them, and how much they believed in them is another matter. They were probably only studied back home, and did probably not affect the final discussions very much. [...] In Nice I was probably the only one to carry around a laptop. Others did not have such calculations. And, again, many (most?) member states had hazy notions about the effects of proposals

sheds light on the role of experts in the negotiations. Although, a *great deal of information about the supposedly 'secret' negotiations can be gathered through media, parliamentary reports and interviews*, nothing can be as informative as a report of a person who has been so close to the events or has even played an active role in what Felsenthal and Machover (*The Measurement of Voting Power*. 1998, p. 168). described in the following words

... the CMEC is undoubtedly one of the world's most important decision making bodies. But the QMV rules were designed and redesigned in the proverbial smoke-filled room, away from public gaze, by a process of political horse-trading between politicians and officials who (as far as we can tell) had no expert advice on the theory of voting power.

In Poland, the officials who showed up at a public conference, which was organized by an NGO in Kraków 2 years ago, said nothing about their doings nor did they confess to having employed someone with a laptop to help them calculate voting power. [...]

In November 2004, the then Foreign Minister Cimoszewicz accepted an invitation to a panel discussion concerning the EU Constitution ratification issue. When the public, which gathered in the grand hall of our university, was given the floor at the end of the debate, I just said that "EU voting systems had been analyzed by academic specialists" – without mentioning specific results. The Minister whom I asked to comment on the role of academic experts replied that the approach of game theorists was "far from reality," so their analyses could not help the negotiators resolve "tough conflicts of interests." Cimoszewicz did not explain the nature of the controversies nor did he name any specific "theoretical" proposal he judged to be unrealistic, yet I suppose that his remark was addressed to both rival "schools": the supporters of "scientific" square root weights vs. those who preferred "arbitrary" weights reflecting a negotiated division of political influence.

[...] Let me repeat that my sympathy for the square root game was conditional: if the weights have to be functionally related to populations, but there is uncertainty about which function to choose, then I would prompt the EU leaders: choose the square root function.

I am not questioning voting power calculations as such, rather whether they are relevant and applicable to the EU. Still, our conclusions have a great deal in common, concerning the balance and possible solutions. Not so about effectiveness.

List do A. Moberga - cd.

As regards *effectiveness*, this issue was raised in Poland mainly by those who attacked the defenders of the Nice Treaty. In my newspaper articles, I suggested that effectiveness and the degree of power inequality should be taken into account in selecting a pool of voting games from which the negotiators should pick a compromise solution. My general suggestion was that voting systems should be designed by specialists in a competition, but its conditions should be specified by the users.

Which definition of voting power is relevant and applicable to the EU? For the mathematician, every definition is good insofar as it provides a basis for a nontrivial **mathematical theory**. If two **empirical** theories compete with each other, the scientist will choose the one which fits the data significantly better than the other theory. However, in the social sciences, the relationship between "theory" and "evidence" is not always that simple. In some circumstances, a theory may correctly depict human actions because social actors do what they think they should do in accordance with the theory they approve. A "rational actor," as it were, differs from a "particle" whose behavior is explained by the physicists by means of theories which do without reconstructing the particle's "preferences" and "cognitive map" of the forces which make it move in a field. Knowing the fact that people act according to some theories they have in their minds, social scientists often try to persuade people to accept **their own** theories.

I certainly agree that academia and the political world must learn from each other. Both ways. As you have seen I share a great deal of politicians' doubts about voting power calculations. (...) It is equally imperative to bridge the abyss between the two cultures within academia, the school (largely mathematicians, economists and even physicists) that engage in voting power calculations and the school (largely political scientists) that studies empirically how the EU actually works.

I fully agree with these remarks. Obviously, the two worlds should meet, say, at scientific conferences. The main problem with the scientists is not that they promote scientific solutions but that they often sell their own political solutions in a scientific disguise. The politicians in turn are not trained to distinguish between political and scientific or technical problems. For this reason, they are too apprehensive of scientific solutions, being uncertain of their true nature. They are afraid that the scientists, supported by the media, may encroach on the domain of **ends** reserved for the **politicians**, instead of remaining in the domain of **means** reserved for **experts**. Another trouble with the politicians is that they often conceal their true ends.

I have long been convinced that classical measures of voting power, especially the Banzhaf index, have actually been known to and used by EU politicians and their advisors, but for some reason they have chosen to hide their way of "theorizing" from the public. That is why I was surprised at the fact that Germany's power advantage had been readily acknowledged by other major "players." The explanation which I proposed in my first newspaper article (January 2004) assumed that the Three did put up with Germany's leading position, having found it beneficial (the case of France) or at least compatible with their political goals. When I realized (in November 2004) that the leaders of the EU countries don't care about "voting power" measured by the Banzhaf index, I tried to guess what they actually attempted to achieve through "political horse-trading". [...]

(następny fragment listu w ramce na s. 16)

Rola eksperta

- Ekspert powinien ukazywać politykom te konsekwencje ich działań konstruktorskich, których oni sami, ze względu na brak wiedzy lub narzędzi analizy, nie są w stanie przewidzieć, gdy projektują rozwiązania instytucjonalne na własną rękę.

Przykład (uwaga autora skierowana do decydentów unijnych): Jeśli waga kraju w systemie głosowania w Radzie UE ma być proporcjonalna do liczby mieszkańców, a równocześnie siłę głosu rozumie się jako zdolność blokowania decyzji Rady, to należy liczyć się z faktem, że liczba koalicji blokujących małych rozmiarów z udziałem danego kraju jest wrażliwa nawet na stosunkowo małe zmiany w strukturze ludnościowej.

- Ekspert, przyjąwszy do wiadomości cele określone przez polityków, niezależnie od tego czy sam te cele akceptuje, powinien zachęcać praktyków, dla których pracuje, by rozważyli wszystkie środki do celu, które dyktuje mu jego wiedza, w szczególności może proponować poszerzenie zakresu opcji, spośród których politycy mają wybrać (wynegocjować) rozwiązanie.
- Ekspert może pracować dla jednego zleceniodawcy, realizując jego interes, ale może także służyć radą wszystkim stronom, nie tylko wtedy gdy ich interesy są zasadniczo zgodne, ale i wtedy, gdy są sprzeczne, lecz oparte na tym samym kryterium oceny. Pracując dla grupy, ekspert powinien zaproponować metodę poszukiwania rozwiązania raczej niż samo rozwiązanie.

Przykład: Propozycje autora przedstawione w artykule w *Dzienniku Polskim* (patrz rozdział 6 tej pracy).

- Ekspert może także zaproponować własne rozwiązanie, odwołujące się do celów deklarowanych przez polityków, lecz wyrażonych przez nich samych w sposób mało precyzyjny w języku ideologicznym.

Przykład (propozycja wag pierwiastkowych Słomczyńskiego i Życzkowskiego, poparta przez około 50 ekspertów z różnych krajów, w tym, warunkowo, przez autora). Przy założeniu, że celem konstytucji UE jest budowa systemu *demokratycznego* decydowania, który wszystkim obywatelom UE daje tę samą szansę wpływania na decyzje Rady – w sytuacji, gdy szansa ta zależy zarówno od wpływu obywatela na rząd swojego kraju jak i od siły głosu tego kraju w Radzie – wagi krajów powinny być proporcjonalne do pierwiastków z liczby ludności.

Cel artykułu

Rozwinięcie naukowej teorii głosowania w kierunku odpowiadającym oczekiwaniom konstruktorów i użytkowników systemów głosowania, którzy bardziej interesują się siłą blokowania niż siłą wygrywania, do tej pory nie odróżnianą przez teoretyków od siły blokowania.

2. PODEJMOWANIE DECYZJI PRZEZ GŁOSOWANIE

2.1. Składniki ogólnego systemu podejmowania decyzji

- Zbiór X sytuacji wyboru; każda sytuacja wyboru jest skończonym zbiorem zawierającym co najmniej 2 opcje. Np. $X=\{x_1, x_2\}$, gdzie x_1 =wprowadzenie kary śmierci do Kodeksu Karnego, x_2 =zachowanie stanu obecnego.
- Zbiór decydentów D (indywidualnych i/lub zbiorowych)
- Struktura kompetencyjna $K: X \rightarrow D$, czyli przyporządkowanie każdej sytuacji wyboru decydenta, który dokonuje wyboru opcji w tej sytuacji, posługując się określoną regułą.
- Struktura decyzyjna, czyli określenie dla każdej pary (X, d) , gdzie $X \in X$, $d=K(X) \in D$, sposobu (reguły) wyboru opcji; ten składnik systemu podejmowania decyzji wymaga osobnej formalizacji w przypadku decydenta zbiorowego.

Niech $d=K(X)=N=\{1, \dots, n\}$ oznacza decydenta zbiorowego (grupę, zgromadzenie, zbiór głosujących)

$V \subset N \times X$ profil wyborów indywidualnych, czyli zbiór par uporządkowanych (i, x) , gdzie $i \in N$, $x \in X$; warunek $(i, x) \in V$ zapisuje się w postaci iVx i odczytuje „aktor i wybiera opcję x ” lub „ i głosuje za x ”

Założenie jednoznaczności wyboru: jeśli iVx i iVx' , to $x=x'$ (jeśli wyborca i opowiada się za jakąś opcją, to nie może równocześnie opowiadać się za inną opcją). Przyjąwszy to założenie, będziemy stosować zapis funkcyjny $x=V(i)$ zamiast zapisu relacyjnego iVx , nie żądając jednak by relacja V była odwzorowaniem N w X , tzn. by każdy wyborca był zwolennikiem jakiejś opcji.

V zbiór profili

$R \subset V \times X$ reguła głosowania stosowana przez grupę N w sytuacji wyboru X ; VRx oznacza, że grupa przy danym profilu V wybiera opcję x .

Zakładamy *jednoznaczność* reguły R (jeśli VRx i VRx' , to $x=x'$), nie zakładając jednak maksymalnej efektywności, tzn. by reguła dyktowała wybór grupowy dla każdego profilu wyborów indywidualnych (formalnie, relacja R nie musi być odwzorowaniem V w X). Zamiast $(V,x) \in R$ i VRx będziemy pisać $x=R(V)$.

2.2. Postulaty nałożone na reguły głosowania

(1) Poszanowanie jednomyślności (warunek Pareto)

$$\forall i (x=V(i)) \Rightarrow x=R(V)$$

Jeśli wszyscy członkowie grupy wybierają x , to grupa jako całość też wybiera x . Jest to równocześnie warunek minimalnej efektywności reguły (grupa może dokonać wyboru przynajmniej w sytuacji, gdy jej członkowie zgodnie wybierają jedną opcję) oraz suwerenności (każda opcja może być wybrana, jeśli zyska jednomyślne poparcie).

(2) Zależność wyboru grupowego od poparcia wystarczającej liczby jednostek (warunek monotoniczności)

$$[x=R(V_1) \text{ i } (\forall i)(x=V_1(i) \Rightarrow x=V_2(i))] \Rightarrow x=R(V_2)$$

Jeśli ci, którzy wybrali x w V_1 , pozostali zwolennikami x w V_2 , a grupa wybrała x w V_1 , wówczas grupa powinna wybrać x także w dla profilu V_2 , w którym x ma nie mniejsze poparcie

$$S(V,x)=\{i \in N: x=V(i)\} \quad \text{zbiór zwolenników opcji } x \text{ w profilu } V$$

$$\text{Wniosek 1: } S(V_1,x)=S(V_2,x) \Rightarrow (x=R(V_1) \Leftrightarrow x=R(V_2))$$

Wybór opcji przez grupę przy danym profilu zależy wyłącznie od zbioru (choć oczywiście niekoniecznie od liczby) zwolenników tej opcji w tym profilu.

$$\text{Wniosek 2. } x=R(V) \Rightarrow S(V,x) \neq \emptyset$$

Opcja wybrana przez grupę musi mieć poparcie przynajmniej jednego członka.

Dowód: Załóżmy, że $x=R(V)$. Jeśli $S(V,x)=\emptyset$, to dla każdego profilu V' fałszywy jest poprzednik implikacji w postulatcie 2, a więc sama implikacja jest prawdziwa. Wynika stąd, $x=R(V)$ dla każdego profilu V , jednak dla profilu V' takiego, że wszyscy wybierają $x' \neq x$, mielibyśmy $x'=R(V')$ z postulatu 1, co jest sprzeczne z założeniem jednoznaczności reguły R .

π permutacja zbioru X (wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru X na siebie)

πV profil otrzymany przez złożenie permutacji π z funkcją V
 $x = \pi V(i) \Leftrightarrow (\text{df}) (\exists y) y = V(i) \text{ i } x = \pi(y)$

(3) Równoprawność opcji (warunek symetrii)

$$(\forall \pi) (x = R(V) \Rightarrow R(\pi V) = \pi(x))$$

Np. $X = \{x_1, x_2\}$, $\pi(x_1) = x_2$, $\pi(x_2) = x_1$. Przypuśćmy, że $x_1 = V(R)$ dla pewnego profilu wyborów indywidualnych. W profilu πV ci i tylko ci, którzy wybierali x_1 , wybierają x_2 (i odwrotnie), więc grupa powinna teraz wybrać x_2 .

Wniosek 3: $S(V_1, x) = S(V_2, y) \Rightarrow (x = R(V_1) \Leftrightarrow y = R(V_2))$.

Dowód: Niech V_3 oznacza profil taki, że $x = V_3(i)$ dla $i \in S(V_1, x)$, $y = V_3(i)$ dla $i \notin S(V_1, x)$. Podobnie konstruujemy profil V_4 , taki, że $y = V_4(i)$ dla $i \in S(V_2, y)$, $x = V_4(i)$ dla $i \notin S(V_2, y)$. Zauważmy, że $V_4 = \pi V_3$, $V_3 = \pi V_4$, gdzie π jest transpozycją x i y . Postulat 3 implikuje, że $x = R(V_3) \Leftrightarrow y = R(V_4)$, a ponieważ $S(V_1, x) = S(V_3, x)$ i $S(V_4, y) = S(V_2, y)$, z wniosku 1 dostajemy równoważności $x = R(V_1) \Leftrightarrow x = R(V_3)$ oraz $y = R(V_2) \Leftrightarrow y = R(V_4)$.

Wniosek 4: $S(V_1, x) \cap S(V_2, y) = \emptyset$, $x \neq y$, $x = R(V_1) \Rightarrow \neg y = R(V_2)$

Dowód: Przypuśćmy, że $y = R(V_2)$. Rozważmy profil V_3 taki, że $V_3(i) = x$ dla $i \in S(V_1, x)$ i $V_3(i) = y$ dla $i \in S(V_2, y)$. Z równości $S(V_1, x) = S(V_3, x)$ i $S(V_2, y) = S(V_3, y)$ wynika, że $R(V_3) = x$ i $R(V_3) = y$, a stąd $x = y$ wbrew założeniu jednoznaczności reguły.

$$\mathbf{W}(x) = \{C \subset N : (\exists V) C = S(V, x), R(V) = x\}$$

$\mathbf{W}(x)$ składa się z podzbiorów zbioru N takich, że poparcie opcji x przez członków takiego podzbioru zapewnia wybór x przez grupę. $C \in \mathbf{W}(x) \Rightarrow C \neq \emptyset$

- Wniosek 5:*
- (1) $N \in \mathbf{W}(x)$
 - (2) $C_1 \in \mathbf{W}(x)$, $C_1 \subset C_2 \Rightarrow C_2 \in \mathbf{W}(x)$
 - (3) $C \in \mathbf{W}(x) \Rightarrow N - C \notin \mathbf{W}(x)$

Dowód (3): Przypuśćmy, że $N - C \in \mathbf{W}(x)$. Niech V_1 i V_2 będą profilami takimi, że $C = S(V_1, x)$, $N - C = S(V_2, x)$ i $R(V_1) = x$, $R(V_2) = x$. Rozważmy profil V_3 taki, że $S(V_3, y) = C$ oraz profil V_4 taki, że $S(V_4, y) = N - C$ dla pewnego $y \neq x$. Zauważmy, że $S(V_1, x) \cap S(V_4, y) = \emptyset$, $x \neq y$, $R(V_1) = x$, a więc (Wniosek 4), $\neg R(V_4) = y$. Z drugiej strony, $S(V_2, x) = S(V_4, y)$ i $x = R(V_2)$, skąd (Wniosek 3), $y = R(V_4)$.

Wniosek 6: $W(x)=W(y)$

Dowód: $C \in W(x)$, $C=S(V,x)$, $\forall R x$ dla pewnego profilu V . Określmy profil V' taki, że $S(V',y)=C$. Z Wniosku 3 wynika, że $y=R(V')$, a zatem $C \in W(y)$.

Nie wszystkie reguły głosowania stosowane w praktyce spełniają podane wyżej postulaty. Dla przykładu rozważmy regułę, która profilowi V przypisuje wybór x , wtedy i tylko wtedy gdy liczba zwolenników x w profilu V jest większa od liczby zwolenników każdej innej opcji (inaczej mówiąc, grupa wybiera opcję, na którą oddano najwięcej głosów). Reguła ta nie spełnia postulatu 2. Postulaty 1,2 i 3 dobrano ze względu na to, że implikują one wnioski 5 i 6, które z kolei umożliwiają formalizację teorii głosowania opierającą się na jednym pojęciu pierwotnym: *koalicja wygrywająca*.

3. TEORIA GIER GŁOSOWANIA

$N = \{1, \dots, n\}$ skończony zbiór graczy

$C = \mathcal{P}(N)$ zbiór koalicji (zbiór wszystkich podzbiorów zbioru graczy)

$W \subset \mathcal{P}(N)$ zbiór koalicji wygrywających

$G=(N, W)$ gra głosowania

Aksjomaty

(A1) $N \in W$

(A2) $C \in W, C \subset D \Rightarrow D \in W$

(A3) $C \in W \Rightarrow N - C \notin W$

Komentarz. (A1) Zbiór graczy $N=N \in C$, zwany *wielką koalicją*, jest koalicją wygrywającą. (A2) Każda *nadkoalicja* dowolnej koalicji wygrywającej jest koalicją wygrywającą. Gdy spełnione są aksjomaty A1 i A2, (N, W) nazywamy *prostą grą głosowania*. (A3) Jeśli spełniony jest też ten aksjomat, gra nazywa się *właściwą*. Termin *gra głosowania* będzie używany dalej w znaczeniu „właściwej prostej gry głosowania”. Funkcja $v: C \rightarrow [0, \infty)$ taka, że $v(C)=1$, gdy $C \in W$, $v(C)=0$, gdy $C \notin W$, jest wówczas *funkcją charakterystyczną* w sensie teorii gier wieloosobowych, tzn, spełnione są warunki: (i) $v(\emptyset)=0$; (ii) $C \cap D = \emptyset \Rightarrow v(C \cup D) \geq v(C) + v(D)$ (superaddytywność).

3.1. Trójpodział zbioru koalicji. Koalicje minimalne danego typu

$L = \{C \in \mathbf{C} : N - C \in \mathbf{W}\}$ Zbiór koalicji **przegrywających**

$B = \mathbf{C} - (\mathbf{W} \cup L)$ Zbiór koalicji **blokujących**

Uwaga. W literaturze przeważają odmienne konwencje definicyjne. Termin „koalicja przegrywająca” bywa odnoszony do każdej koalicji spoza \mathbf{W} , zaś koalicję blokującą definiuje się za pomocą warunku „ $N - C \notin \mathbf{W}$ ”, który pociąga za sobą, że każda koalicja wygrywająca jest blokująca. W typowych zastosowaniach politycznych wygodniejszy jest jednak podział koalicji na trzy parami rozłączne rodziny.

$T: \mathbf{C} \ni C \rightarrow N - C \in \mathbf{C}$ jest wzajemnie jednoznaczny odwzorowanie zbioru koalicji na siebie. Ponieważ $T(\mathbf{W})=L$, $T(L)=\mathbf{W}$, $T(B)=B$, otrzymujemy wzór

$$c = w + l + b = 2w + b \quad \text{gdzie } c = |\mathbf{C}| = 2^n, w = |\mathbf{W}|, l = |L|, b = |B|$$

Stosunek $e = \frac{w}{c} = \frac{w}{2w+b}$ nazywa się *efektywnością gry*

Wielkość ta osiąga maksimum równe $\frac{1}{2}$, gdy $b=0$ ($B=\emptyset$), a minimum równe $1/2^n$, gdy $w=1$ ($\mathbf{W}=\{N\}$, *gra konsensusowa*).

Koalicję C nazywamy *minimalną* danego typu, jeśli każdy podzbiór właściwy C nie jest koalicją tego typu. Ponieważ każdy podzbiór koalicji przegrywającej jest koalicją przegrywającą, jedyną minimalną koalicją przegrywającą jest koalicja pusta \emptyset .

$\mathbf{Wm} = \{C \in \mathbf{W} : D \subsetneq C \Rightarrow D \notin \mathbf{W}\}$ zbiór minimalnych koalicji wygrywających

$\mathbf{Bm} = \{C \in \mathbf{B} : D \subsetneq C \Rightarrow D \notin \mathbf{B}\}$ zbiór minimalnych koalicji blokujących

$\mathbf{W}(i) = \{C \in \mathbf{W} : i \in C\}$ zbiór koalicji wygrywających z udziałem gracza i

$\mathbf{Wm}(i) = \{C \in \mathbf{Wm} : i \in C\}$ zbiór minimalnych koalicji wygrywających z udziałem gracza i

$\mathbf{B}(i) = \{C \in \mathbf{B} : i \in C\}$ zbiór koalicji blokujących z udziałem gracza i

$\mathbf{Bm}(i) = \{C \in \mathbf{Bm} : i \in C\}$ zbiór minimalnych koalicji blokujących z udziałem gracza i

3.2. Pojęcie gracza krytycznego

Gracz $i \in C$ jest **krytycznym** członkiem koalicji C , jeśli koalicja $C - \{i\}$ jest innego typu niż C . Jeśli $C \in L$ i $D \subset C$, to $D \in L$. Jeśli $C \in W$ i $D \subsetneq C$, to $D \in W$ lub $D \in B$ lub $D \in L$, jeśli natomiast $C \in B$ i $D \subsetneq C$, to $D \in B$ lub $D \in L$. Niech

$$W > B > L$$

oznacza uporządkowanie trzech typów koalicji według „siły” (koalicje wygrywające nazywamy mocniejszymi od blokujących, a blokujące mocniejszymi od przegrywających). Każda koalicja może zawierać wyłącznie podkoalicje tego samego typu lub słabsze. W konsekwencji tylko koalicje wygrywające i blokujące mogą mieć członków krytycznych, czyli tych, których odejście osłabia koalicję.

$Ws(i) = \{C \in W(i) : C - \{i\} \notin W\}$ Zbiór koalicji wygrywających, w których gracz i jest krytyczny

$Bs(i) = \{C \in B(i) : C - \{i\} \notin B\}$ Zbiór koalicji blokujących, w których gracz i jest krytyczny

$$Wm(i) \subset Ws(i) \subset W(i)$$

$$Bm(i) \subset Bs(i) \subset B(i)$$

$$C \in Wm \Leftrightarrow C \neq \emptyset \text{ i } (\forall i \in C) C \in Ws(i)$$

$$C \in Bm \Leftrightarrow C \neq \emptyset \text{ i } (\forall i \in C) C \in Bs(i)$$

Uwaga. W literaturze przedmiotu spotyka się czasem definiowanie minimalnej koalicji wygrywającej za pomocą słabszego warunku $(\exists i \in C) C \in Ws(i)$ i wówczas koalicje minimalne w przyjętym w tej pracy znaczeniu nazywa się „ściśle minimalnymi”.

3.3. Izomorfizm gier głosowania i parametry strukturalne

Odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne $\alpha: N \rightarrow N$ nazywa się *izomorfizmem gier* $G_1 = (N, W_1)$ i $G_2 = (N, W_2)$ jeśli $\alpha(W_1) = W_2$, gdzie $\alpha(W_1) = \{\alpha(C) : C \in W_1\}$.

Funkcja F o wartościach liczbowych określona na zbiorze $G(N)$ wszystkich gier głosowania o tym samym ustalonym zbiorze graczy N nazywa się *globalnym parametrem strukturalnym*, jeśli $F(G_1) = F(G_2)$ dla dowolnych izomorficznych gier G_1 i G_2 .

Funkcja $f(G, i)$ o wartościach liczbowych określona dla każdego $G \in G(N)$ i każdego $i \in N$ nazywa się *lokalnym parametrem strukturalnym*, jeśli $f(G, \alpha(i)) = f(G, i)$ dla każdego $i \in N$ i każdego automorfizmu α gry G .

Wielkości w , l , b , $wm = |\mathbf{Wm}|$, $bm = |\mathbf{Bm}|$ to przykłady globalnych parametrów strukturalnych.

Lokalne parametry strukturalne używane do konstrukcji klasycznych miar siły głosu:

$$wm(i) = |\mathbf{Wm}(i)| \leq ws(i) = |\mathbf{Ws}(i)| \leq w(i) = |\mathbf{W}(i)|$$

Do kwantyfikacji siły blokowania można próbować wykorzystać ich odpowiedniki:

$$bm(i) = |\mathbf{Bm}(i)| \leq bs(i) = |\mathbf{Bs}(i)| \leq b(i) = |\mathbf{B}(i)|$$

3.4. Twierdzenia o parametrach strukturalnych

1. $w(i) = \frac{1}{2}(ws(i) + w)$ (twierdzenie Dubeya i Shapleya)

Dowód. Rozważmy zbiory $\mathbf{W}^*(i) = \{C \in \mathbf{W} : i \notin C\}$ i $\mathbf{Ws}^*(i) = \{C \in \mathbf{W}(i) : C - \{i\} \in \mathbf{W}\}$. Nietrudno wykazać, że $C \rightarrow C \cup \{i\}$ jest odwzorowaniem 1-1 $\mathbf{W}^*(i)$ na $\mathbf{Ws}^*(i)$, co pociąga za sobą równość (1) $w^*(i) = ws^*(i)$, która wraz z (2) $w = w(i) + w^*(i)$ i (3) $w(i) = ws(i) + ws^*(i)$, daje poszukiwany wzór.

Obie wielkości, $w(i)$ i $ws(i)$, ze względu na liniową zależność, równie dobrze nadają się do konstrukcji miar sił głosu. W praktyce wykorzystuje się $ws(i)$, a najbardziej popularną miarą jest *indeks Banzhafa*

$$\beta_i = \frac{ws(i)}{\sum_{i=1}^n ws(j)}$$

2. $b(i) = 2^{n-1} - w$

Dowód. Zbiór wszystkich koalicji z udziałem gracza i liczy 2^{n-1} elementów i jest sumą trzech parami rozłącznych podzbiorów $\mathbf{W}(i)$, $\mathbf{B}(i)$, $\mathbf{L}(i)$. Mamy zatem $2^{n-1} = w(i) + b(i) + l(i)$. Zbiory $\mathbf{L}(i) = \{C \in \mathbf{L} : i \in C\}$ i $\mathbf{W}^*(i)$ są równoliczne ze względu na wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $C \rightarrow N - C$. Stąd $l(i) = w^*(i)$. Z drugiej strony mamy $w = w(i) + w^*(i)$, a stąd $w = w(i) + l(i)$. W konsekwencji $b(i) = 2^{n-1} - (w(i) + l(i)) = 2^{n-1} - w$.

Tak więc $b(i)$ inaczej niż $w(i)$ nie różnicuje graczy i nie nadaje się jako miara siły blokowania.

3. $bs(i) \leq ws(i)$; $bs(i) = ws(i) \Leftrightarrow (C \in \mathbf{Ws}(i) \Rightarrow C - \{i\} \in \mathbf{B})$

Dowód. Przyporządkowanie $C \rightarrow (N - C) \cup \{i\}$ jest odwzorowaniem różnowartościowym zbioru $\mathbf{Bs}(i)$ w zbiór $\mathbf{Ws}(i)$.

Ponieważ warunek równości $bs(i)$ i $ws(i)$ zwykle bywa spełniony dla gier ważonego głosowania, zdefiniowanie *the Banzhaf-like index of blocking power* za pomocą wzoru $bs(i)/\sum_j bs(j)$ nie rozwiązuje problemu odróżnienia dwu rodzajów siły głosu: siły wygrywania i siły blokowania.

3.5. Gry ważonego głosowania

$p_i > 0$ waga gracza i $p(C) = \sum_{i \in C} p_i$ waga koalicji C

$q > \frac{1}{2}p(N)$ kwota („qualified majority”)

$p(N) - q$ próg blokowania („blocking minority”)

$W = \{C: p(C) \geq q\}$ $B = \{C: p(N) - q < p(C) < q\}$ $L = \{C: p(C) \leq p(N) - q\}$

Mówimy, że gra ważonego głosowania $G(q; p_1, \dots, p_n)$ reprezentuje grę (N, W) jeśli $W = \{C: p(C) \geq q\}$. Nie każda gra głosowania ma taką reprezentację (warunek konieczny i wystarczający podali Taylor i Zwicker).

Gra kwalifikowanej większości z identycznymi wagami to przypadek najczęściej spotykany w praktyce. Można wówczas przyjąć $p_i = 1$ dla $i = 1, \dots, n$ („1 gracz - 1 głos”):

Łatwo udowodnić, że dowolna gra daje się reprezentować za pomocą *one voter - one vote qualified majority game* wtedy i tylko wtedy, gdy każda permutacja zbioru graczy jest automorfizmem gry (warunek ten wyraża w języku matematyczny zasadę równości głosujących). W grze tego rodzaju wszystkie lokalne parametry strukturalne (w szczególności miary siły głosu) przyjmują identyczną wartość dla każdego gracza. Efektywność systemu głosowania zależy wówczas wyłącznie od kwoty (im wyższe q , tym trudniej zebrać większość potrzebną do przeprowadzenia decyzji).

Przykład gry, w której gracze różnią się wagami

Ważony system głosowania w Radzie Europejskiej obowiązujący w UE-15

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 10$	Niemcy, Francja, W. Brytania, Włochy
$p_5 = 8$	Hiszpania
$p_6 = p_7 = p_8 = p_9 = 5$	Holandia, Grecja, Portugalia, Belgia
$p_{10} = p_{11} = 4$	Szwecja, Austria
$p_{12} = p_{13} = p_{14} = 3$	Dania, Finlandia, Irlandia
$p_{15} = 2$	Luksemburg.

$$q=62 \quad p(N)=87 \quad p(N)-q=25$$

Zauważmy, że gra ta spełnia warunek konieczny i wystarczający równości $ws(i)=bs(i)$. Istotnie, Jeśli $C \in \mathbf{Ws}(i)$, to $p(C) \geq 62$, $p(C-\{i\})=p(C)-p_i \geq 62-p_i \geq 62-10=52 > 25$, $p(C-\{i\}) < 62$, $C-\{i\} \in \mathbf{B}$.

W powyższej grze wagi zostały dobrane tak, by *porządek* 15 krajów według wagi był zgodny z porządkiem według liczby ludności. Samo przypisanie wag było jednak decyzją polityczną.

3.6. Iloczyn i suma gier głosowania

$G_1 = (\mathbf{N}, \mathbf{W}_1)$, $G_2 = (\mathbf{N}, \mathbf{W}_2)$ gry głosowania o tym samym zbiorze graczy \mathbf{N}

Iloczyn gier $G_1 \cap G_2 = (\mathbf{N}, \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)$ zawsze jest grą głosowania

Suma gier $G_1 \cup G_2 = (\mathbf{N}, \mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2)$ jest grą głosowania wtedy i tylko wtedy, gdy $C_1 \in \mathbf{W}_1$, $C_2 \in \mathbf{W}_2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$

Jeśli $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$, to $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2 \cup (\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{W}_2) \cup (\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{L}_2)$

Jeśli $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$, to $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2$

Obie operacje na grach, z pozoru mogące interesować wyłącznie teoretyków, były wykorzystywane przez konstruktorów systemów głosowania w UE, którzy najwyraźniej intuicyjnie czują, że w iloczynie występuje więcej koalicji blokujących niż w każdej grze z osobna, a sumowanie gier redukuje liczbę koalicji tego typu.

3.7. Rozmiar minimalnych koalicji wygrywających i blokujących

Wprowadzimy teraz parametry strukturalne uwzględniające rozmiar (liczbę członków) minimalnych koalicji wygrywających lub blokujących. Potrzeba rozważenia takich parametrów bierze się stąd, że praktycy takie właśnie koalicje biorą pod uwagę, badając możliwości blokowania decyzji zbiorowych, jakie im daje reguła głosowania. Największą siłę blokowania ma gracz i , który sam jeden może uniemożliwić grupie podjęcie decyzji; formalnie: zbiór $\{i\}$ jest koalicją blokującą. W grze konsensusowej taką możliwość ma każdy gracz. Siła blokowania nie jest więc dobrem z natury konfliktogennym, inaczej niż siła wygrywania, której maksymalizacja prowadzi do dominacji nad innymi. *Dyktatorem* nazywa się gracz $\{i\}$, taki, że $\{i\}$ jest koalicją wygrywającą. Jeśli istnieje dyktator, może być nim tylko jeden gracz, a wszyscy pozostali są wówczas *figurantami (dummies)* o zerowej sile wygrywania ($ws(i)=0$, a stąd $wm(i)=0$). Zauważmy, że figurant ma równocześnie zerową siłę blokowania (jeśli $ws(i)=0$, to $bs(i)=0$, a stąd też $bm(i)=0$).

$Wm(i,k) = \{C \in Wm(i) : C =k\}$	liczba minimalnych koalicji wygrywających mających k członków z udziałem gracza i
$Wm(k) = \{C \in Wm : C =k\}$	liczba wszystkich k -elementowych minimalnych koalicji wygrywających
$Bm(i,k) = \{C \in Bm(i) : C =k\}$	liczba minimalnych koalicji blokujących mających k członków z udziałem gracza i
$Bm(k) = \{C \in Bm : C =k\}$	liczba wszystkich k -elementowych minimalnych koalicji blokujących

List do A. Moberga - ciąg dalszy

The results of my "investigation" are given in the *Postscript* (patrz plik *komprops.pdf* na stronie domowej autora) where you can find solutions of many puzzles.

My analysis is based on the coefficient which I defined as the ratio of the number of Small Minimal Blocking Coalitions containing a given player to the number of all SMBC. I proposed (see the *Postscript*, p. 17) how to define *small* in the context of a *mathematical* theory, but we could probably better understand what happened in the "smoke-filled room" if we had the negotiators themselves tell us how large (in terms of the number of members) "blocking minorities" they took into account in their discussions.

I am sure that the size of blocking coalitions was considered by the negotiators as a crucial factor. Otherwise the clause "A blocking minority must include at least four Council members..." would not have been appended to Article I-25 at the last stage of negotiations. Without that clause the Constitution game would admit of 10 minimal blocking triples of which 9 would contain Germany, whereas only 5 of them would contain France, UK or Italy. Although the "parity principle" was apparently abandoned (without telling this to the world), the most powerful EU member states still care about preserving a sort of balance among themselves!

You often ask why the other large countries eventually accepted a greater weight for Germany. The answer is probably that they see it as way of maintaining a leading role for the large countries, combined, after the enlargements.

It is clear that *population* weights have been introduced in the interest of largest countries – at the cost of assigning a greater weight to Germany, but the cost was not too high for the Three. I also agree with your image of other goals pursued by the leaders of the EU countries. Clearly, they wanted to

restore the position of power the large (or semi-large, if you excuse the expression) countries had before the last enlargements (...) But, what does it mean in quantitative terms?

Indeed, what does it mean in *quantitative* terms?

Dokończenie listu na s. 20

$$wm(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n wm(i,k)$$

$$wm(i,k) = |Wm(i,k)| \quad wm(k) = |Wm(k)|$$

$$bm(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n bm(i,k)$$

$$bm(i,k) = |Bm(i,k)| \quad bm(k) = |Bm(k)|$$

$$kw(i) = \min \{k: wm(i,k) > 0\}$$

najmniejszy rozmiar minimalnej koalicji wygrywającej z udziałem gracza i

$$kb(i) = \min \{k: bm(i,k) > 0\}$$

najmniejszy rozmiar minimalnej koalicji blokującej z udziałem gracza i

(jeśli $wm(i,k)=0$ dla $k=1, \dots, n$, kładziemy $kw(i)=0$; podobnie, jeśli $bm(i,k)=0$ dla $k=1, \dots, n$, kładziemy $kb(i)=0$)

$$kw_{\min} = \min \{|C|: C \in Wm\}$$

najmniejszy rozmiar minimalnej koalicji wygrywającej

$$kb_{\min} = \min \{|C|: C \in Bm\}$$

najmniejszy rozmiar minimalnej koalicji blokującej

$$kw_{\max} = \max \{kw(i): i \in N\} = \min \{k: (\forall i)(wm(i) > 0 \Rightarrow \exists (s \leq k) wm(i,s) > 0)\}$$

$$kb_{\max} = \max \{kb(i): i \in N\} = \min \{k: (\forall i)(bm(i) > 0 \Rightarrow \exists (s \leq k) bm(i,s) > 0)\}$$

Im mniejsza wartość parametru $kw(i)$ ($kb(i)$), tym mniej partnerów potrzebuje gracz i , aby utworzyć wraz z nimi utworzyć minimalną koalicję wygrywającą (blokującą), a więc jego siła blokowania będzie tym większa. Jednakże gracz i , oceniając swoją siłę blokowania, może brać pod uwagę także jak liczny jest zbiór potencjalnych partnerów do koalicji danego rozmiaru, a więc miara siły blokowania powinna uwzględniać wartości $wm(i,k)$ ($bm(i,k)$) dla małych k .

Które koalicje blokujące należy uznać za małe? Dla gracza i , który zadaje sobie pytanie, ilu innych graczy musi namówić do zablokowania niekorzystnej dla siebie decyzji, będą to z pewnością koalicje blokujące rozmiaru $kb(i)$, ewentualnie większe, gdy – z uwagi ma małą liczbę najmniejszych koalicji blokujących ($b(i, kb(i))$) – gracz i uzna, że warto szukać poparcia także u tych graczy j , dla których $kb(j) > kb(i)$ i $b(i, kb(j)) > 0$. Poniższe definicje proponują takie *wspólne* rozumienie pojęć małej koalicji wygrywającej i blokującej, które mogliby zaakceptować wszyscy gracze.

Definicja: Minimalną koalicję wygrywającą (blokującą) C nazywamy *małą*, gdy

$$|C| \leq kw_{\max} \quad (|C| \leq kb_{\max})$$

Sens wprowadzonych wyżej parametrów stanie się jasny, gdy rozważymy prosty, choć nietrywialny przykład gry: opisany wyżej system głosowania w Piętnastce.

Tabela 1. Statystyka koalicji wygrywających i blokujących w UE-15

Państwa UE-15	waga	$ws(i)$ $bs(i)$	$wm(i)$	$wm(i,k)$		$bm(i)$	$bm(i,k)$	
				$k=8$	$k=9$		$k=3$	$k=4$
1. Niemcy	10	1849	674	16	147	324	6	153
2. Francja	10	1849	674	16	147	324	6	153
3. W. Brytania	10	1849	674	16	147	324	6	153
4. Włochy	10	1849	674	16	147	324	6	153
5. Hiszpania	8	1531	619	16	115	334	6	108
6. Holandia	5	973	542	9	70	489	0	86
7. Grecja	5	973	542	9	70	489	0	86
8. Portugalia	5	973	542	9	70	489	0	86
9. Belgia	5	973	542	9	70	489	0	86
10. Szwecja	4	793	511	6	64	494	0	74
11. Austria	4	793	511	6	64	494	0	74
12. Dania	3	595	485	0	61	485	0	64
13. Finlandia	3	595	485	0	61	485	0	64
14. Irlandia	3	595	485	0	61	485	0	64
15. Luksemburg	2	375	375	0	47	375	0	36

$$w=2549 \quad wm=829 \quad wm(8)=16 \quad wm(9)=149$$

$$b=27670 \quad bm=1270 \quad bm(3)=10 \quad bm(4)=360$$

$$kw_{\min} = 8 \quad kb_{\min} = 3$$

$$kw_{\max} = 9 \quad kb_{\max} = 4$$

3.8. Indeksy siły wygrywania i blokowania

W literaturze znane są indeksy siły głosu (indeksy Hollera i Deegana-Packela), a właściwie siły wygrywania, przy obliczaniu których bierze się pod uwagę wszystkie minimalne koalicje wygrywające. Jeśli ograniczyć się do małych minimalnych koalicji wygrywających, rozkład siły wygrywania nie ulegnie zasadniczej zmianie. Inaczej rzecz wygląda z koalicjami blokującymi. Jeśli uwzględnić wszystkie minimalne koalicje blokujące, największą siłę blokowania w UE-15 miałyby kraje „wagi średniej”. Wszakże, gdy wziąć pod uwagę tylko małe koalicje blokujące, czołowa piątka wysuwa się zdecydowanie na czoło, a rozkład liczby małych koalicji blokujących jest zgodny z porządkiem wag (później pokazane zostanie, że sytuacja taka nie zawsze ma miejsce).

Najprostsze współczynniki siły wygrywania i blokowania oparte na liczeniu małych minimalnych koalicji wygrywających i blokujących można zdefiniować za pomocą następujących wzorów

$$wp(i) = \frac{\sum_{k=kw_{\min}}^{kw_{\max}} wm(i,k)}{\sum_{k=kw_{\min}}^{kw_{\max}} wm(k)} \quad bp(i) = \frac{\sum_{k=kb_{\min}}^{kb_{\max}} bm(i,k)}{\sum_{k=kb_{\min}}^{kb_{\max}} bm(k)}$$

Tak więc $wp(i)$ ($bp(i)$) to liczba małych minimalnych koalicji wygrywających (blokujących) z udziałem gracza i podzielona przez liczbę wszystkich małych minimalnych koalicji wygrywających (blokujących).

Należy wątpić, czy indeks $bp(i)$ był znany unijnym konstruktorom systemów głosowania i ich ekspertom. Pewne jest jedynie to, że brali pod uwagę liczbę minimalnych koalicji blokujących najmniejszego rozmiaru (kb_{\min}) jako dodatkowe kryterium. Według relacji A. Moberga (przedstawionej w niepublikowanym artykule oraz w korespondencji z autorem) do oceny siły blokowania w grze ważonego głosowania stosowano w pierwszej kolejności współczynnik (zwany *share of blocking minority*) zdefiniowany za pomocą wzoru

$$\frac{p_i}{p(N)-q} \quad (\text{lub} \quad \frac{p_i}{p(N)-q+1} \quad \text{dla gier o wagach całkowitych})$$

Nasza siła w Unii

Nowy system głosowania wynikający z konstytucji ma zakładać, że decyzje będą zapadać tzw. podwójną większością – 55 proc. państw (czyli 15 krajów w UE liczącej 27 członków po przyjęciu Rumunii i Bułgarii) reprezentujących 65 proc. ludności. Mniejszość blokująca decyzje to 45 proc. krajów i 35 proc. ludności.

Uzgodnione proporcje są korzystniejsze dla Polski i Hiszpanii, niż zaproponował to w ub.r. Konwent (50 proc. krajów i 60 proc. ludności) – dają nam bowiem niewiele mniejsze możliwości blokowania decyzji niż traktat z Nicei.

Dlaczego? Trochę matematyki:

- Polskie 27 głosów z Nicei (na w sumie 345) dawało nam ok. 7,8 proc. „władzy” w Unii. W mniejszości blokującej wynoszącej 91 głosów stanowiły niemal 30 proc.
- Po zmianie systemu głosowania nasze 38,2 mln ludności da nam 8 proc. „władzy” w UE. W mniejszości blokującej wynoszącej 35 proc. ludności nasz udział to będzie tylko ok. 23 proc. (...)

Gdyby Unia przyjęła żądany przez nas próg 25 proc. ludności (...)

Gazeta Wyborcza, 19 czerwca 2004 r.
(korespondencja z Brukseli po konferencji międzyrządowej)

List do A. Moberga - dokończenie

[...] For each country, I computed the coefficient described above [*bp(i)*, w grze dla UE-27 zaakceptowanej w traktacie konstytucyjnym] [...] Notice that the blocking power of 6 largest countries (from Germany to the Netherlands) of the EU-15 was not only restored but strengthened, whereas the position of the remaining 9 countries worsened to a degree. Having joined the EU, Poland, aspiring to be the “second Spain”, became the “second Netherlands” in EU-27. Nevertheless, the then Prime Minister Belka, having returned from the June 2004 Brussels IGC, said to Polish mass media that a satisfactory compromise was reached. What he wanted to achieve was — to quote again from your letter — might have been *to show the domestic opinion that you have a powerful role*. To underpin his opinion, Belka could invoke the share of “blocking minority” of which you say that it *is not the only possible measure. But it does focus on what discussions were about*.

To compute the share of BM, one does not need a computer program so your testimony I quoted above agrees with the one concerning rare use of notebooks by the tribe of EU politicians. Certainly, an anthropologist who is going to study political culture of that tribe must not overlook the practice of calculating power in terms of the BM share. I am going to adopt this approach in my paper - along with purely mathematical approach under which (to quote from my first letter), “comparing a voter's weight with the threshold for 'blocking minorities' may be a too crude way of measuring blocking power.”

Why can't the BM share satisfy a mathematician? It is not a too low *degree of sophistication* but sheer inadequacy of this measure at least in some situations. I explained this issue in the *Postscript* (p. 23) where I showed that if this parameter is applied, then Luxembourg was twice as stronger in the initial Six – where this country was a “dummy”— than in the Fifteen – where the position of the weakest player was incomparably better.

The reason why 65% were chosen, was obviously to accommodate Spain's demand for blocking potential (and possibly Poland, too). The other large countries certainly had nothing against it.

It is a plausible explanation, but my “investigation” led me to the conclusion that the share of BM was by no means the only estimate of “blocking potential” used on IGCs. What other measure was used by the “aborigenes”? Was it the measure I devised with the intention to formalize *their* concept of voting power? I simply don't know if the culture in question has already achieved the level rationality at which the use of refined numerical indices becomes indispensable. Anyway, I suspect that the way of *thinking* of EU leaders does not depart too far from the *formal* approach I arrived at by translating into formulas such informal statements, widely accepted by the politicians, as “the less co-members you need to persuade that they block with you a group decision you oppose, the stronger your position in the decision-making body,” and “your position would be even better if you can choose allies for blocking from a larger set, so that if you fail to persuade one group member, you can address another one.” A formalization of these insights requires that few concepts be introduced (*minimal blocking coalition* being the most important) by a mathematician sensitive to the political culture in which such concept of voting power prevails.

Let me conclude my letter with the above remark which I would like to develop into a full-fledged paper to be submitted to, say, *Mathematical Social Sciences*.

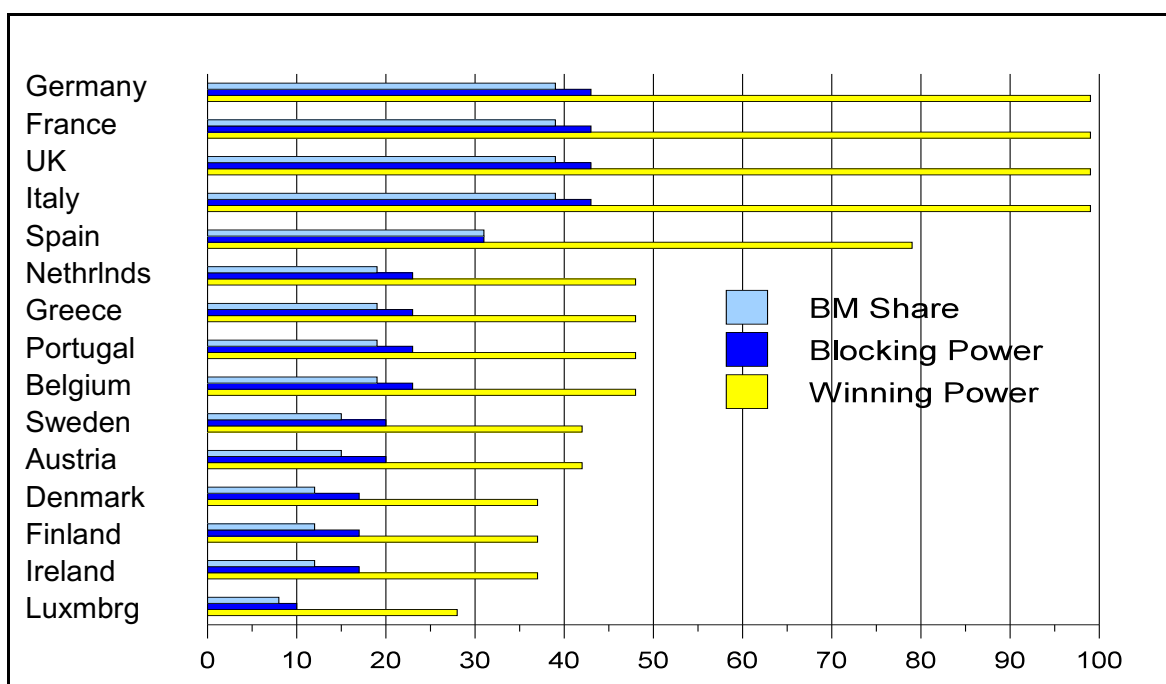
With best wishes.

Tad

Raport korespondenta „Gazety Wyborczej” z Brukseli przytoczony w pierwszej ramce to kolejny dowód na to, że politycy unijni rzeczywiście stosują metodę, którą w pierwszym liście do Moberga uznałem za “a too crude way of measuring blocking power”, na co mój korespondent odpowiedział “...of course, the share BM of blocking minority is not the only possible measure. But it does focus on what discussions were about, and illustrates the effects of various components quite well.”

Tabela 2. Rozkład miar siły wygrywania i blokowania

Państwa UE-15	$w_p(i)$ (%)	$b_p(i)$ (%)	$p_i/26$ (%)
1. Niemcy	98.8	43.0	38.5
2. Francja	98.8	43.0	38.5
3. W. Brytania	98.8	43.0	38.5
4. Włochy	98.8	43.0	38.5
5. Hiszpania	79.4	30.8	30.8
6. Holandia	47.9	23.2	19.2
7. Grecja	47.9	23.2	19.2
8. Portugalia	47.9	23.2	19.2
9. Belgia	47.9	23.2	19.2
10. Szwecja	42.4	20.0	15.4
11. Austria	42.4	20.0	15.4
12. Dania	37.0	17.3	11.5
13. Finlandia	37.0	17.3	11.5
14. Irlandia	37.0	17.3	11.5
15. Luksemburg	28.5	9.7	7.7



I rzeczywiście, pochopne odrzucenie miary stosowanej przez praktyków byłoby błędem. W pewnych grach, w szczególności w grze zaprojektowanej dla Starej Unii, miara ta daje rozkład siły blokowania zadziwiająco zgodny z rozkładem wartości zaproponowanej przez mnie bardziej subtelnej miary. Dla gier określonych dla UE-27 *share of blocking minority* nie wykazuje już takiej zgodności z $bp(i)$.

Uwaga. Liczby przedstawione w Tabelach 1, 2 i innych tabelach uzyskano za pomocą programu POWERIND (informacja o nim jest na stronie domowej autora). W kwietniu 2006 dopisałem procedurę obliczania nowych indeksów, jednak aktualna wersja programu nie nadaje się jeszcze do udostępniania zainteresowanym.

4. GRA NICEJSKA

System głosowania, który został ostatecznie wpisany do traktatu nicejskiego, jest *iloczynem trzech gier ważonego głosowania*. Pierwsza z nich podobna jest do gry stosowanej w UE-15, tzn. opiera się na przypisaniu graczom wag, które można nazwać „politycznymi”, jako że odzwierciedlają „układ sił” uzgodniony przez samych graczy.

4.1. Własności systemu głosowania w UE-15

“The deliberations leading to the allocation of voting weights were held in secret; so we have no first-hand direct evidence of the criteria that the EC politicians and officials used in this allocation.” (Felsenthal and Machover 1998: 163). W tej sytuacji możemy jedynie formułować hipotezy wyjaśniające dlaczego skonstruowany system ma takie a nie inne własności, przy czym nie musimy zakładać, że konstruktorzy *świadomie* posługiwali się jakąś teorią. Dla przykładu (informacja od A. Moberga), wagi pierwiastkowe były już rozważane w Nicei (“as a practical solution, Penrose was, and still is unknown to most of the negotiators.”), zanim jeszcze propozycja ta zyskała podbudowę teoretyczną (praca Słomczyńskiego i Życzkowskiego). Układ wag dla Piętnastki można wyjaśnić, zakładając świadome odwołanie się do *parity principle* i świadome lub nieświadome zastosowanie „prawa pierwiastkowego”. Zastosowanie zasady równości polegało, po pierwsze, na zignorowaniu ludnościowej przewagi Niemiec nad Wielką Trójką, pod drugie, na zrównaniu krajów 10-milionowych z Holandią.

Dla każdej z 6 grup, na które podzielona została Piętnastka, wybrano jako reprezentanta kraj o największej liczbie mieszkańców (w tabeli podano ludność na początek roku 1995) z wyjątkiem grupy pierwszej, w której ludność Niemiec (wówczas 81.5 mln) po prostu pominięto, ignorując przyłączenie Niemiec wschodnich do RFN.

Tabela 3. Pierwiastkowe własności wag w grze stosowanej w UE-15

Grupa	Kraj	l_i	$\sqrt{l_i}$	p_i	p_{i+1}/p_i	$\sqrt{l_{i+1}/l_i}$
1	UK	58.5	7.65	10		
2	Hiszpania	39.3	6.27	8	.800	.82
3	Holandia	15.3	3.91	5	.625	.62
4	Szwecja	8.8	2.97	4	.800	.76
5	Dania	5.2	2.28	3	.750	.77
6	Luksemburg	0.4	0.63	1	.333	.28

Gdyby konsekwentnie stosować prawo pierwiastkowe, Luksemburg powinien otrzymać wagę $p_{15}=1$. Gdyby tak zrobiono, należałoby następnie wybrać odpowiedni próg q , próbując kolejne wartości począwszy od 59, przy tej bowiem liczbie każda minimalna koalicja wygrywająca musi liczyć co najmniej 8 państw, a więc jest równocześnie koalicją wygrywającą w grze “1 państwo–1 głos”. Okazałoby się wówczas, że jedynie dla $q=61$, struktura blokowania wykazywałaby podobną regularność jak dla $p_{15}=2$ i $q=62$. Ostatecznie przypisano Luksemburgowi wagę 2, co mogło wynikać z “łaskawości” pozostałych graczy, ale wówczas też należało dopasować odpowiednią kwotę i to zrobiono, co dowodzi, że przekonanie teoretyków akademickich o niekompetencji ekspertów unijnych nie zawsze jest uzasadnione.

Regularność, o której mowa w powyższej analizie, oznacza dwie własności liczebności małych koalicji blokujących.

$$(R1) \quad kb_{\min} \leq k_1 < k_2 \leq kb_{\max} \Rightarrow bm(i, k_1) \leq bm(i, k_2),$$

(dla każdego gracza i , wartość $bm(i, k)$ rośnie, a przynajmniej nie maleje, gdy k rośnie od kb_{\min} do kb_{\max} ; gdy $kb_{\min} = kb_{\max}$, warunek ten jest automatycznie spełniony)

$$(R2) \quad bm(i, k_1) < bm(j, k_1) \Rightarrow bm(i, k_2) \leq bm(j, k_2), \text{ gdy } kb_{\min} \leq k_1, k_2 \leq kb_{\max}$$

(porządki graczy ze względu na liczbę k -elementowych minimalnych koalicji blokujących są zgodne dla małych k).

Badanie gry dla UE-15 z $p_{15}=2$ pokazuje, że dobór odpowiedniej kwoty jest sprawą zasadniczą dla spełnienia warunków R1 i R2. Wszystko wskazuje na to, że konstruktor gry dla Piętnastki był profesjonalistą-matematykiem, który dobrał kwotę tak, by zapewnić regularność gry. Nieregularność oznaczałaby zresztą większe uprzywilejowanie Hiszpanii, której zrównanie z Niemcami, Wielką Brytanią, Francją i Włochami co do liczby blokujących trójek i tak już irytowało Wielką Czwórkę.

4.2. Trzy warianty gry nicejskiej

Kto i w jaki sposób zaprojektował wagi polityczne dla UE-27? Dlaczego układ wag 10:8:5 dla Wielkiej Czwórki, Hiszpanii i Holandii został zastąpiony układem 29:27:13, w którym stosunki wyraźnie odbiegają od prawa pierwiastkowego? Nie wiadomo. Pewne wydaje się tylko to, że autor pierwotnej wersji systemu nicejskiego w innych aspektach musiał wzorować się na grze obowiązującej w Piętnastce, skoro jako kwotę zaproponował 258 głosów. Nietrudno zgadnąć dlaczego. Otóż suma wag 13 największych krajów (od Niemiec do Węgier) jest równa 257, a zatem przy kwocie równej co najmniej 258 każda minimalna koalicja wygrywająca w grze z wagami politycznymi byłaby też wygrywająca w grze "1 państwo–1 głos" podobnie jak w grze zaprojektowanej dla UE-15.

W UE-15 każdy z 5 największych krajów może utworzyć minimalną blokującą trójkę z dwoma innymi krajami spośród tej piątki. Polsce przyznano taką samą wagę jak Hiszpanii w ten sposób tworząc Wielką Szóstkę. Suma głosów dla każdej trójki w ramach tego zbioru może być równa $27+27+29=83$, $27+29+29=85$ lub $29+29+29=87$. Gdyby utrzymana została kwota 258, każda minimalna koalicja blokująca musiałaby dysponować co najmniej 88 głosami ($88=345-258+1$), a więc – inaczej niż było w Piętnastce – żadna trójka nie miałaby możliwości blokowania. Wydaje się jednak, że konstruktorowi pierwszego wariantu gry nicejskiej nie zależało wcale na tym, by w grze liczącej aż 27 graczy dopuścić blokujące trójki, takie rozwiązanie oznaczałoby bowiem, że w razie polaryzacji opinii w ramach szóstki (3 vs. 3) niemożliwe byłoby podjęcie jakiegokolwiek decyzji. Poszukiwanie sojuszników poza szóstką przez przeciwne frakcje w jej ramach byłoby bezcelowe, a tym samym pozostałych 21 aktorów pełniłoby jedynie rolę statystów.

Zastosowanie kwoty 258 ma jeszcze jeden skutek. Otóż struktura blokowania jest wtedy jednopoziomowa, formalnie, $kb_{\min}=kb_{\max}$, lub równoważnie $bm(i, kb_{\min})>0$ dla każdego i . W języku bardziej zrozumiałym dla praktyków: każdy kraj może utworzyć przynajmniej jedną mniejszość blokującą wraz z trzema innymi krajami. Jednak, jak pokazuje Tabela 4, każdy z 6 największych krajów może utworzyć około 10 razy więcej czwórek blokujących niż każdy z pozostałych 21 krajów! Trudno się więc dziwić, że pierwszy wariant gry nicejskiej został odrzucony. Dowodem na to, że wariant ten pojawił się w negocjacjach, jest zapis o co najmniej 258 głosach potrzebnych do podjęcia decyzji. Zapis ten został skorygowany, gdy analitycy wykryli sprzeczność między nim a dodanym później zapisem o mniejszości blokującej 91 głosów.

Sprzeczności i nieprecyzyjne sformułowania w tekście traktatu nicejskiego wzięły się chyba z trudności komunikacyjnych w układzie złożonym z *polityków*, *urzędników* i *ekspertów*. Eksperci – formułując swoje propozycje rozwiązań i oceniając *logiczną* poprawność propozycji formułowanych przez polityków za pośrednictwem urzędników – posługiwali się językiem technicznym, który, jak sądzę, był znacznie bliższy językowi używanemu w tej pracy niż językowi *mainstream* teorii głosowania. Politycy określali cele negocjacyjne i ostatecznie

akceptowali lub odrzucali rozwiązania przekładane przez urzędników z języka technicznego na język prawniczy, a ponadto w jeszcze innym, polityczno-medialnym języku zwracali się do opinii publicznej w swoich krajach, starając się zyskać poparcie dla wynegocjowanych przez siebie rozwiązań. Najtrudniejsze chyba zadanie mieli urzędnicy, jako że musieli komunikować się równocześnie z ludźmi wiedzy i ludźmi władzy, starając się zrozumieć co mówią obie strony. Oni też odpowiadają za kształt zapisów traktatowych i jak widać trochę się pogubili, pozostawiając „kwalifikowaną większość” 258 głosów i wpisując równocześnie w innym miejscu warunek, że „mniejszość blokująca” ma liczyć co najmniej 91 głosów.

Matematyczną analizę gry nicejskiej przedstawili Felsenthal i Machover (“The Treaty of Nice and Qualified Majority Voting.” *Social Choice and Welfare* 18 (2001)), wszelako ich podejście nie wychodzi poza główny nurt teorii gier głosowania, w którym pojęcie koalicji blokującej odgrywa rolę marginalną.

Kolejny wariant gry nicejskiej otrzymano przez podwyższenie progu blokowania z 88 do 91, czyli obniżenie kwoty z 258 do 255. Ponieważ przy mniejszej kwocie pojawiają się koalicje wygrywające złożone w 13 krajów, dołączono zapis, że do podjęcia decyzji potrzebna jest zwykła większość krajów, czyli 14 głosów w grze zwykłej większości.

Niech $G_1(255)$ oznacza grę ważonego głosowania z $N=\{1,\dots,27\}$, politycznymi wagami nicejskimi oraz kwotą $q_1=255$; z kolei niech $G_2(14)$ oznacza grę „1 gracz – 1 głos” z kwotą $q_2=14$. Drugi wariant gry nicejskiej ma postać iloczynu $G_1(255)\cap G_2(14)$.

Zauważmy, że gra $G_2(14)$ jest *mocna*, tzn. nie zawiera koalicji blokujących (dla każdego podzbioru C zbioru graczy N mamy wtedy: $C\in W$ lub $N-C\in W$). W konsekwencji (patrz wzór podany w odcinku 3.6 na s. 15) zbiór koalicji blokujących w $G_1(255)\cap G_2(14)$ jest sumą trzech zbiorów:

- (1) $B(G_1)$ koalicje blokujące w G_1
- (2) $W(G_1)\cap L(G_2)$ koalicje wygrywające w G_1 , a przegrywające w G_2 ; są to koalicje osiągające próg 255 głosów, lecz mające mniej niż 14 członków (łatwo sprawdzić, że muszą mieć 13 członków)
- (3) $W(G_2)\cap L(G_1)$ koalicje wygrywające w G_2 , a przegrywające w G_1 ; są to te koalicje złożone z 14 lub więcej krajów, które dysponują łącznie mniej niż 255 głosami

Ponieważ koalicje typu (2) lub (3) mają co najmniej 13 członków, małe minimalne koalicje blokujące w iloczynie pokrywają się z małymi minimalnymi koalicjami blokującymi w G_1 . Dołączenie gry G_2 nie ma zatem wpływu na rozkład siły blokowania, o ile siła blokowania gracza ma zależeć wyłącznie od liczby małych minimalnych koalicji blokujących z jego udziałem.

Dlaczego jako minimum głosów wymagane, aby koalicja mogła zablokować decyzję

Rady, wskazano 91, a nie 92 lub więcej? Gdy jesienią 2004 roku studentom (uczestnikom kursu „Modele formalne w polityce”) przedstawiłem pierwszą „nieklasyczną” analizę gry nicejskiej, pytanie to pozostawiłem bez odpowiedzi. W niniejszej pracy proponuję następujące rozwiązanie tej zagadki. Otóż, $91=p(N)-q+1$ to najniższy próg blokowania (odpowiada mu kwota 255), przy którym gra $G_1(q)$ ma dwupoziomą strukturę blokowania z koalicjami czwórkowymi na najniższym poziomie. Zauważmy, że struktura ta nie spełnia warunku regularności R2. Najbardziej zaskakuje zrównanie Rumunii z największymi krajami pod względem liczby minimalnych blokujących piątek. Jeśli jednak ograniczyć się do czwórek, Rumunia pozostaje daleko w tyle za Polską.

Który z tych dwu krajów ma większą siłę blokowania? Jeśli uznać, że 5 piątek daje tyle samo siły co 4 czwórki, wówczas siła blokowania Rumunii będzie równa $20/4 + 678/5=5+135.6=140.6$, a Polski $140/4 + 590/5 = 35+118 = 153$, lub w wersji unormowanej 20.0% i 21.8%. Unormowanie polega na podzieleniu przez $315/4 + 1756/5$, gdzie 315 (1756) to liczba minimalnych blokujących czwórek (piątek). Przy nieregularnej strukturze blokowania ten sposób obliczania siły blokowania (wzorowany na indeksie Deegana-Packela) – uwzględniający nie tylko liczbę małych minimalnych koalicji blokujących, lecz także ich rozmiar – wydaje się bardziej adekwatny. Wybór indeksu w ostateczności zależy jednak od użytkownika. Na pytanie, który z dwu krajów, Polska czy Rumunia, ma większą siłę blokowania, powinni odpowiedzieć najpierw politycy polscy i rumuńscy, zapoznawszy się z danymi dostarczonymi im przez eksperta. Możliwe jednak, że jedyną reakcją na tak postawione pytanie byłoby oczekiwanie, że sam ekspert przeprowadzi stosowne obliczenia i podpowie czy zaakceptować system głosowania, który generuje takie dane.

Czy istnieje taka kwota, że gra z wagami politycznymi dla UE-27 będzie miała strukturę blokowania równie regularną jak gra w UE-15, a także charakteryzującą się takim zróżnicowaniem siły, które byłoby do przyjęcia dla wszystkich 27 krajów? Aby odpowiedzieć na to jakże praktyczne pytanie, należałoby zbadać wszystkie gry z q zmieniającym się od 234 do 263. Górna granica to kwota, przy której wszystkie trójki w obrębie Wielkiej Szóstki i tylko takie trójki będą minimalnymi koalicjami blokującymi ($263=345-83+1$, gdzie $83=27+27+29$ to minimalna liczba głosów, jaką dysponują trzy spośród sześciu największych państw UE). Dalsze podwyższanie kwoty dałoby mniejszym krajom przywilej blokowania w trójkach, na co największym krajom chyba trudno byłoby się zgodzić. Dolną granicę przedziału kwot do rozważenia dostaniemy, żądając, by każda czwórka w ramach Szóstki była koalicją blokującą. Minimalna kwota, przy której warunek ten jest spełniony, wynosi $345-112+1=234$ głosy, gdzie $112=27+27+29+29$ to liczba głosów w posiadaniu najsłabszej czwórki (Polska, Hiszpania i dowolne dwa większe kraje).

Czy eksperci uczestniczący w negocjacjach, które zakończyły się podpisaniem traktatu nicejskiego, badali tak szeroki zakres kwot? Czy dysponowali odpowiednim programem? Nie wiem. Ja sam – z uwagi na to, że analiza gry dla $n=27$ za pomocą mojego programu (POWERIND) zajmuje na moim komputerze (Pentium III, 667 Mhz) około 4.5 godziny – zdążyłem dotąd zbadać tylko kilka przypadków. Osobiście wydaje

mi się prawdopodobne, że liczbę 91, czyli kwotę 255 wybrano *ad hoc*, zauważywszy, że suma głosów najsilniejszej trójki (29+29+29=87) wraz z 3 głosami Malty jest równa 90, a więc do modyfikacji gry wystarczy podniesienie progu blokowania o 1 punkt. Następnie (posługując się chyba jakimś programem komputerowym, bo „ręczne” sprawdzenie, które z 17550 4-elementowych podzbiorów zbioru 27-elementowego są koalicjami blokującymi musiałoby zająć dużo czasu) wyznaczono $bm(i,4)$ dla wariantów I i II i stało się jasne, że w wariacie II przewaga Wielkiej Czwórki nad Hiszpanią jest wyraźniejsza (170/140=1.2) niż w wariacie I (214/196=1.09), choć ciągle jeszcze mniejsza niż w Piętnastce (153/108=1.42, patrz Tabela1).

Tabela 4. Małe minimalne koalicje blokujące dla 3 wariantów gry nicejskiej

Państwa UE-27	waga polit.	waga pop.	I: $bm(i,k)$		II: $bm(i,k)$		III: $bm(i,k)$		
			k=4	k=4	k=5	k=3	k=4	k=5	
1. Niemcy	29	171	214	170	678	3	111	650	
2. Francja	29	123	214	170	678	2	129	664	
3. W. Brytania	29	123	214	170	678	2	129	664	
4. Włochy	29	118	214	170	678	2	125	678	
5. Hiszpania	27	85	196	140	590	0	145	562	
6. Polska	27	79	196	140	590	0	137	590	
7. Rumunia	14	45	20	20	678	0	17	678	
8. Holandia	13	33	20	20	528	0	17	528	
9. Grecja	12	23	20	20	405	0	17	405	
10. Portugalia	12	21	20	20	405	0	17	405	
11. Belgia	12	21	20	20	405	0	17	405	
12. Czechy	12	21	20	20	405	0	17	405	
13. Węgry	12	21	20	20	405	0	17	405	
14. Szwecja	10	19	20	20	239	0	17	239	
15. Austria	10	17	20	20	239	0	17	239	
16. Bułgaria	10	16	20	20	239	0	17	239	
17. Dania	7	11	20	16	76	0	13	76	
18. Słowacja	7	11	20	16	76	0	13	76	
19. Finlandia	7	11	20	16	76	0	13	76	
20. Irlandia	7	8	20	16	76	0	13	76	
21. Litwa	7	7	20	16	76	0	13	76	
22. Łotwa	4	5	16	4	96	0	3	86	
23. Słowenia	4	4	16	4	96	0	3	86	
24. Estonia	4	3	16	4	96	0	3	86	
25. Cypr	4	2	16	4	96	0	3	86	
26. Luksemburg	4	1	16	4	96	0	1	88	
27. Malta	3	1	16	0	80	0	0	72	
$\Sigma, \Sigma/k$	345	1000	411	315	1756	3	256	1728	

Do obliczenia wag populacyjnych podanych w Tabeli 4 wykorzystano dane o ludności 27 krajów na początek roku 2002.

Czy dlatego wariant II nie został zaakceptowany, lecz zastąpiony przez wariant III, w którym dodano warunek, że każda koalicja wygrywająca musi obejmować państwa o łącznej liczbie mieszkańców stanowiącej co najmniej 62% ludności Unii? Z pewnością nie chodziło tylko o przywrócenie możliwości blokowania przez trójki (cel ten można było osiągnąć, wybierając odpowiednio kwotę w grze z wagami politycznymi), ale o podważenie zasady równości (*parity principle*) czterech największych państw Unii. Choć zmiana miała być przeprowadzona tak, by jej istota nie rzucała się w oczy, sama wysokość kwoty w grze z wagami ludnościowymi wszystko tłumaczy. Otóż przy $q=62\%$, jedynymi trójkami blokującymi są trzy trójki w ramach Wielkiej Czwórki: (i) {Niemcy, Francja, Wielka Brytania}, (ii) {Niemcy, Francja, Włochy}, (iii) {Niemcy, Wielka Brytania, Włochy}, wszystkie z udziałem Niemiec. Koalicja trójkowa złożona z Francji, W. Brytanii i Włoch jest koalicją przegrywającą, bo ludność tych trzech krajów stanowi mniej niż 37% całej UE-27.

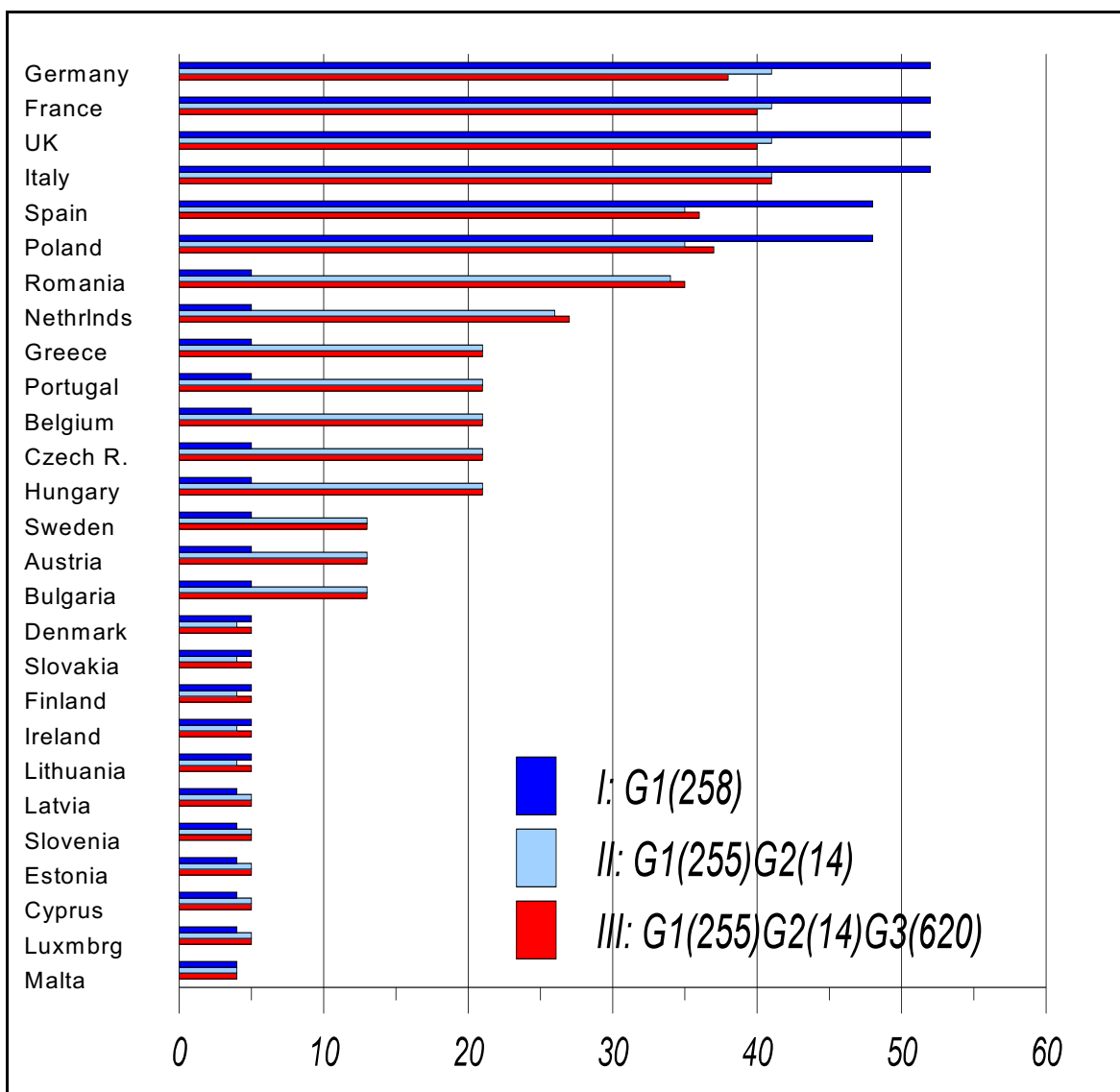
Ostatecznie zaakceptowany wariant III gry nicejskiej ma postać iloczynu trzech gier ważonego głosowania $G_1(255) \cap G_2(14) \cap G_3(620)$.

Aby obliczyć liczbę koalicji różnych typów na gruncie *arytmetyki liczb całkowitych*, w grze G_3 wprowadziłem wagi sumujące się do 1000, w związku z czym kwota musi być równa 620. W grze $G_3(620)$ waga p_i jest zaokrągleniem do najbliższej liczby całkowitej wielkości $1000 \cdot (P_i/P)$, gdzie P_i to ludność kraju i -tego w tysiącach mieszkańców, a P to ludność całej UE-27. Np. Niemcy na początku 2005 według *Eurostat Yearbook 2005* miały 82532 tys. mieszkańców, a ludność Unii wraz z Rumunią i Bułgarią według tego źródła liczyła 486377 tys. Stąd przez zaokrąglenie $1000(82532/486377)=169.69$ otrzymujemy $p_1=170$. Program POWERIND zaokrąglenie przeprowadza tak, by $\sum p_i=1000$.

Komentarz analizujący strukturę blokowania w III wariantcie gry nicejskiej pozostawiam czytelnikowi, dodając jedynie uwagę, że spadek liczby minimalnych blokujących czwórek w porównaniu z II wariantem, jaki ma miejsce w przypadku czterech największych i niektórych innych krajów, wynika stąd, że minimalna blokująca czwórka w grze II może przestać być minimalna w grze III, ponieważ zawiera blokującą trójkę w grze $G_3(620)$.

Na wykresie przedstawiono rozkład wartości współczynnika siły blokowania bp dla trzech wariantów gry nicejskiej. Jak widać, różnica między wariantami II i III jest niewielka, jeśli jednak w obliczeniach pominąć blokujące piątki, jako „małe” traktując tylko trójki i czwórki, Hiszpania i Polska wysuwają się na czoło. Zresztą gdyby w obliczeniach posłużyć się bardziej aktualnymi danymi ludnościowymi (ludność 27 krajów na początku roku 2004 według *Eurostat Yearbook 2005*), małymi minimalnymi koalicjami blokującymi zgodnie z formalną definicją byłyby tylko trójki i czwórki. Najwyższą wartość współczynnika bp miałyby wówczas Hiszpania ($bp(5)=56.8\%$), wyprzedzając Niemcy o 10 punktów procentowych ($bp(1)=45.1\%$). Pomysł „poprawienia” systemu opartego na wagach politycznych przez połączenie go z systemem opartym na wagach populacyjnych okazał się więc chybiony.

Rozkład wartości współczynnika bp dla trzech wariantów gry nicejskiej



5. GRA KONSTYTUCYJNA

Przeprowadzona wyżej analiza 3 wariantów gry nicejskiej pozwala lepiej zrozumieć intencje, jakimi kierował się Konwent proponując uproszczenie zapisanego w traktacie nicejskim systemu potrójnej większości. Proponowana modyfikacja polegała, po pierwsze, na obniżeniu progu ludnościowego z 62 do 60%, po drugie, na odrzuceniu gry opartej na wagach „politycznych”. Podniesienie progu blokowania do 40% miało chyba na celu utrwalenie przewagi Niemiec nad Francją, Wielką Brytanią i Włochami, ustanowionej już w Nicei przez dodanie trzeciej większości kwalifikowanej – dodajmy – przewagi niezauważonej przez analityków posługujących się wyłącznie tradycyjnymi „teoretycznymi” indeksami siły głosu. Trzy kraje przyzwoliły na to, sądząc zapewne, że

zwiększenie przewagi nad Hiszpanią i Polską (krajami aspirującymi do rozszerzenia *parity principle* na całą Wielką Szóstkę) zrekompensuje im pogorszenie ich położenia w stosunku do Niemiec.

Zauważmy teraz, że najslabsza czwórka w ramach Wielkiej Szóstki osiąga 40,6% ludności UE-27, a więc jest koalicją blokującą zarówno w grze z względnymi wagami ludnościowymi i kwotą 60% jak w grze z wagami "politycznymi" i kwotą równą 234 lub więcej głosów. Po co więc łączyć dwa systemy, jeśli jeden, w dodatku oparty na „obiektywnej” strukturze ludnościowej, daje największym krajom takie same możliwości blokowania, a ponadto ma dużo wyższą efektywność? Tak właśnie mógł rozumować Konwent, proponując uproszczenie systemu nicejskiego przez odrzucenie „politycznej” alokacji nominalnych głosów. Propozycja ta spotkała się jednak z nieprzychylną reakcją Polski i Hiszpanii. Na stanowisko obu rządów mogli wpłynąć eksperci akademicy, pokazując mediom wykresy umożliwiające porównanie rozkładów klasycznych miar siły głosu dla dwu systemów: nicejskiego i proponowanego przez Konwent. Jeśli ówczesny rząd polski określał swój cel negocjacyjny (patrz ramka na s. 19), posługując się medialną miarą siły blokowania, także musiał zaprotestować. Dla gry nicejskiej (dokładniej, dla jej drugiego wariantu) stosunek $27/91=29.7\%$ (politycznej wagi Polski do wielkości „mniejszości blokującej”) jest aż o 10 punktów procentowych wyższy od analogicznego stosunku, $7.9/40 = 19.8\%$, obliczonego dla gry konstytucyjnej w wersji Konwentu.

Pomysł zastąpienia wag politycznych wagami populacyjnymi zyskał w końcu poparcie większości krajów Unii (w międzyczasie poszerzonej o 10 nowych członków), w dużym stopniu ze względu na swoją prostotę, „obiektywność” i pozorną większą przejrzystość, jeśli idzie o wpływ na rozkład siły blokowania. Najpoważniejsze rozwiązanie alternatywne, system oparty na wagach pierwiastkowych, poparli liczni eksperci akademicy, wszelako większość polityków unijnych uznała je za jeszcze jedną próbę wejścia uczonych w nie swoje kompetencje.

Artykuł I-25. Definicja kwalifikowanej większości w Radzie Europejskiej i Rada.

1. Większość kwalifikowaną określa się jako co najmniej 55% członków Rady, w liczbie co najmniej 15, reprezentujących państwa członkowskie, których ludność stanowi co najmniej 65% ludności Unii.

Mniejszość blokująca musi obejmować co najmniej czterech członków Rady, przy czym w razie niespełnienia tego warunku, przyjmuje się, że większość kwalifikowana została osiągnięta.

Po punkcie 1 następuje pominięty tu punkt 2 zawężający zakres zastosowania punktu 1 do sytuacji, gdy z wnioskiem o poddanie danej kwestii pod głosowanie występuje do Rady Komisja Europejska lub Minister Spraw Zagranicznych UE. Przy głosowaniu wniosków pochodzących skądinąd kwota ludnościowa ma być ta sama, 65%, natomiast kwota krajów zostaje podniesiona do 72%, czyli 20 dla UE-27).

Ostatnią sprawą do uzgodnienia pozostał zatem wybór kwoty dla gry z wagami populacyjnymi. Decyzja zapadła na Konferencji Międzyrządowej 18 czerwca 2004. Gra głosowania ostatecznie wpisana do traktatu konstytucyjnego (w ramce podaję tekst odpowiedniego artykułu w tłumaczeniu własnym z angielskiego) okazała się nie mniej skomplikowana od nicejskiej, gdyż nieoczekiwanie do systemu podwójnej większości dodano klauzulę określającą minimalny rozmiar „mniejszości blokującej”.

Przekład artykułu I-25 z *Eurospeak* na język teorii gier głosowania daje następujący wynik.

Niech $H_1(15)$ oznacza grę głosowania o zbiorze graczy $N=\{1,\dots,27\}$ z wagi identycznymi wagami, równymi 1, przypisanymi wszystkim graczom, i kwotą 15.

W UE-27 mamy $0.55 \cdot 27 = 14.85$, stąd $q=15$. Ponieważ $0.55 \cdot 25 = 13.75$, w UE-25 powinna obowiązywać kwota 14, jednak artykuł I-25.1 podnosi kwotę do 15 także w tym przypadku. Na razie nie jest dla mnie jasne dlaczego podjęto taką decyzję.

Gra z wagami ludnościowymi i kwotą 65% zostanie przedstawiona w postaci $H_2(650)$, gdzie 650 oznacza kwotę, która stosuje się w sytuacji gdy wagi ludnościowe zostaną wyrażone jako liczby całkowite sumujące się do 1000 (patrz opis gry $G_3(620)$ na s. 28).

Wariant I gry konstytucyjnej – gra podwójnej większości opisana na początku artykułu I-25 – ma postać iloczynu $H_1(15) \cap H_2(650)$. Zbiór koalicji blokujących tej grze jest sumą 4 zbiorów (patrz wyżej odcinek 3.6, s. 15).

- | | |
|--|--|
| (1) $\mathbf{B}(H_1)$ | koalicje blokujące w $H_1(15)$, czyli 13- i 14-elementowe podzbiory $N=\{1,\dots,27\}$ |
| (2) $\mathbf{B}(H_2)$ | koalicje blokujące w $H_2(650)$, czyli wszystkie podzbiory N obejmujące co najmniej 351/1000 i mniej niż 650/1000 ludności UE-27. |
| (3) $\mathbf{W}(H_2) \cap \mathbf{L}(H_1)$ | koalicje wygrywające w $H_2(650)$, a więc obejmujące co najmniej 650/1000 ludności UE-27, i przegrywające w $H_1(15)$, czyli mające co najwyżej 12 członków. |
| (4) $\mathbf{W}(H_1) \cap \mathbf{L}(H_2)$ | koalicje wygrywające w $H_1(15)$, liczące 15 lub więcej członków, osiągające co najwyżej 350/1000 ludności UE-27. |

Jak pokazano w Tabeli 5, w grze $H_1(15) \cap H_2(650)$ występuje 10 trójkowych minimalnych koalicji blokujących, spośród których aż 9 zawiera Niemcy, a tylko 5 Francję, Wielką Brytanię i Włochy. Wprawdzie zasada równości Wielkiej Czwórki już w Nicei została zakwestionowana z przyzwoleniem Trzech, w ostatniej fazie negocjacji zaprotestowali oni przeciw konsekwencji dokonanego przez siebie wyboru systemu głosowania, dołączając klauzulę o minimalnym rozmiarze koalicji blokującej. W ten sposób powstał

II wariant gry konstytucyjnej, wpisany ostatecznie do traktatu

Tabela 5. Małe minimalne koalicje blokujące w grze podwójnej większości (15, 650)

Państwa UE-27	p_i	$bm(i,k)$ Konst. I			$bp(i)$ Konst. II	$bp(i)$ Nicea II	$p_i / 350$
		$k=3$	$k=4$	$k=5$			
1. Niemcy	170	9	36	384	53.7	41.0	48.6
2. Francja	123	5	27	352	48.5	41.0	35.1
3. W. Brytania	123	5	27	352	48.5	41.0	35.1
4. Włochy	119	5	22	317	43.4	41.0	34.0
5. Hiszpania	87	3	29	204	29.8	35.3	24.9
6. Polska	78	3	19	182	25.7	35.3	22.3
7. Rumunia	45	0	33	85	15.1	33.7	12.9
8. Holandia	33	0	10	218	29.2	26.5	9.4
9. Grecja	23	0	7	131	17.6	20.5	6.6
10. Portugalia	22	0	7	123	16.6	20.5	6.3
11. Belgia	21	0	5	149	19.7	20.5	6.0
12. Czechy	21	0	5	149	19.7	20.5	6.0
13. Węgry	21	0	5	149	19.7	20.5	6.0
14. Szwecja	18	0	5	111	14.8	12.5	5.1
15. Austria	17	0	4	111	14.7	12.5	4.9
16. Bułgaria	16	0	3	112	14.7	12.5	4.6
17. Dania	11	0	0	86	11.0	4.4	3.1
18. Słowacja	11	0	0	86	11.0	4.4	3.1
19. Finlandia	11	0	0	86	11.0	4.4	3.1
20. Irlandia	8	0	0	60	7.7	4.4	2.3
21. Litwa	7	0	0	51	6.5	4.4	2.0
22. Łotwa	5	0	0	36	4.6	4.8	1.4
23. Słowenia	4	0	0	28	3.6	4.8	1.1
24. Estonia	3	0	0	19	2.4	4.8	0.9
25. Cypr	1	0	0	8	1.0	4.8	0.3
26. Luksemburg	1	0	0	8	1.0	4.8	0.3
27. Malta	1	0	0	8	1.0	3.9	0.3
$\Sigma, \Sigma/k$	1000	10	61	721			

Wagi ludnościowe zestawione w drugiej kolumnie Tabeli 5 obliczone zostały z danych o ludności 27 krajów na początku roku 2004 pochodzących z tego samego źródła (*Eurostat Yearbook 2005*) co dane wykorzystane w Tabeli 4. Jeśli zastosować podane tam wagi, zbiór małych minimalnych koalicji blokujących będzie się składał z 10 trójek, 56 czwórek i 792 piątek, zachowa się jednak trójpoziomowa struktura z podobną nieregularnością.

Niech $H_3(24)$ oznacza grę typu „1 państwo – 1 głos” z kwotą 24. Koalicje blokujące w tej grze są podzbiorami \mathbf{N} liczącymi od 4 do 23 członków. Modelem matematycznym systemu głosowania opisanego w artykule I-25 traktatu konstytucyjnego jest następująca

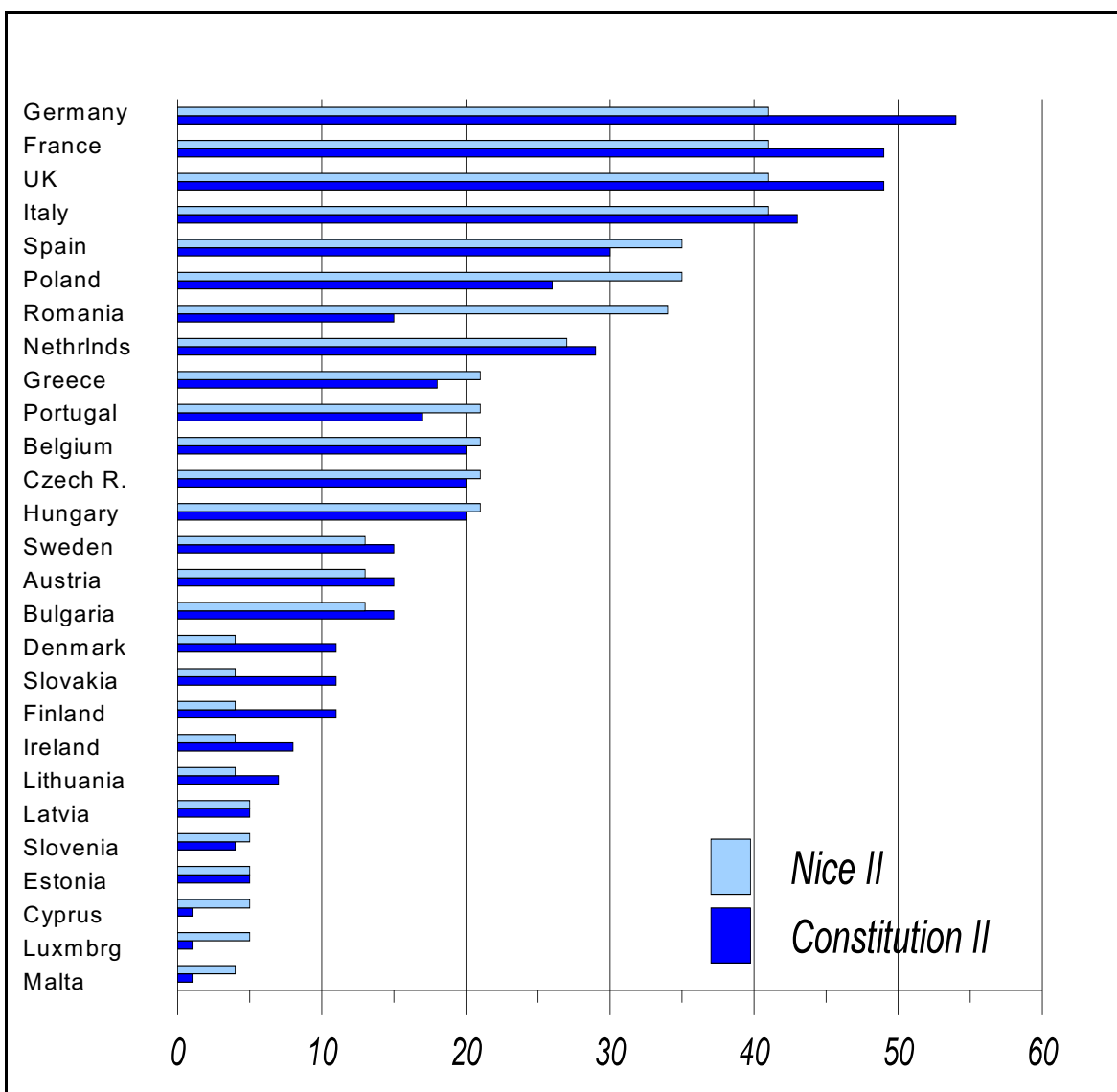
gra

$$H=(H_1(15)\cap H_2(650))\cup H_3(24)$$

Ponieważ każda koalicja C_1 wygrywająca w grze iloczynowej będącej pierwszym składnikiem sumy mnogościowej ma co najmniej 15 członków, a każda koalicja C_2 w grze będącej drugim składnikiem ma co najmniej 24 członków, zbiory C_1 i C_2 nie mogą być rozłączne, a zatem H jest grą głosowania.

Można wykazać, że koalicje blokujące w H są to koalicje blokujące w $H_1\cap H_2$ liczące co najmniej 4 graczy. Tak więc strukturę blokowania w grze H dostaniemy pomijając kolumnę Tabeli 5, w której podane liczby blokujących trójek z udziałem poszczególnych graczy.

Rozkład wartości bp dla gry nicejskiej (II) i gry konstytucyjnej (II)



II wariant gry konstytucyjnej – ostatecznie zaakceptowany przez negocjatorów 18 czerwca 2004 w Brukseli – należy porównywać raczej z II wariantem gry nicejskiej niż z hybrydą wyprodukowaną w Nicei 11 grudnia 2000. Obie gry mają dwupoziomą strukturę blokowania (czwórki i piątki) i obie wykazują nieregularność typu 2. Jeśli jednak siła blokowania ma być skorelowana dodatnio z liczbą ludności, to wariant II gry nicejskiej jest bliższy spełnienia tego warunku. 42-milionowa Hiszpania i 38-milionowa Polska są wówczas nieco silniejsze od 22-milionowej Rumunii, która z kolei wyprzedza 16-milionową Holandię ze względu na udział w większej ilości blokujących piątek. W grze konstytucyjnej za Hiszpanią lokuje się Holandia, która wyraźnie wyprzedza Polskę. Rumunia pozostaje na końcu, choć z drugiej strony ze względu na liczbę blokujących czwórek zbliża się do Niemiec. Jeszcze dziwniejsze nieregularności pojawiają się w grze konstytucyjnej w UE-25.

6. KONSTRUOWANIE GIER GŁOSOWANIA NA ZASADZIE KOMPROMISU

System głosowania dla rozszerzonej UE został skonstruowany po długich negocjacjach. Uczestniczący w nich politycy na ogół nie ukrywali, że stronom chodziło nie tyle o wypracowanie rozwiązania instytucjonalnego realizującego jakąś koncepcję *dobra wspólnego*, czy interesu Unii jako całości, ile o osiągnięcie kompromisu pomiędzy interesami państw członkowskich (lub grup państw), przy czym owe interesy, choć z reguły określano je w sposób nader mętny, postrzegano jako zdecydowanie rozbieżne.

W niniejszym rozdziale przedstawię w sposób bardziej sformalizowany koncepcję poszukiwania kompromisu zaproponowaną w moim artykule „Kompromis, za jaką cenę?”, który ukazał się 22 czerwca w *Dzienniku Polskim* bezpośrednio po Konferencji Międzyrządowej w Brukseli, na której uzgodniono konstytucyjny zapis dotyczący podejmowania decyzji przez Radę UE. Autorska wersja artykułu jest dostępna na stronie domowej w pliku *komprops.pdf* wraz z *Postscriptum* dopisanym w grudniu 2004.

Niech R_i oznacza relację preferencji gracza i na zbiorze $\mathbf{G}(\mathbf{N})$ (przypomnijmy, że jest to zbiór wszystkich gier głosowania o tym samym zbiorze graczy \mathbf{N}). O relacji R_i zakładamy, że jest zwrotna, przechodnia i spójna. Zapis GR_iH czytamy: „gracz i uważa grę G za lepszą lub równie dobrą dla siebie jak gra H ”.

Relacja preferencji podyktowana przez lokalny parametr strukturalny f (miarę siły głosu) zdefiniujemy za pomocą warunku.

$$GR_iH \Leftrightarrow (\text{df}) f(G,i) \geq f(H,i)$$

Niech $\mathbf{G}_0(\mathbf{N})$ podzbiór $\mathbf{G}(\mathbf{N})$ złożony z gier, spośród których ma być wybrana gra kompromisowa

Kryteria doboru $\mathbf{G}_0(\mathbf{N})$

- określenie sposobu konstrukcji gry

np. w UE po odrzuceniu systemu nicejskiego uzgodniono, że system wpisany do traktatu konstytucyjnego musi mieć postać $G_1 \cap G_2$, gdzie G_1 i G_2 są grami ważonego głosowania, w związku z czym przedmiotem negocjacji pozostał wybór dwu kwot (minimalna liczba krajów i minimalny procent ludności).

- wskazanie przedziałów, w jakich powinny mieścić się wartości wybranych globalnych parametrów strukturalnych, np. efektywności i współczynnika nierówności wybranej miary siły głosu.

$$f_-(i) = \text{Min} \{f(G,i) : G \in \mathbf{G}_0(\mathbf{N})\} \quad f_+(i) = \text{Max} \{f(G,i) : G \in \mathbf{G}_0(\mathbf{N})\}$$

$[f_-(i), f_+(i)]$ przedział negocjacji gracza

$$f(G,i) = \frac{1}{2}(f_-(i) + f_+(i)) \text{ gra kompromisowa}$$

Przykład (z artykułu w Dzienniku Polskim)

Niech $\mathbf{N} = \{1, \dots, 25\}$ i $f(G,i) = \beta(G,i)$ (indeks Banzhafa)

Zbiór $\mathbf{G}_0(\mathbf{N})$ otrzymano biorąc najpierw pod uwagę zbiór 36 gier podwójnej większości z $q_1 = 13, 14, 15, 16, 17, 18$ i $q_2 = 550, 600, 650, 700, 750, 800$. Ze zbioru tego wyselekcjonowano 9 gier o efektywności nie mniejszej od 10% i nierówności mierzonej za pomocą odchylenia standardowego wartości indeksu Banzhafa w przedziale od 100 do 400 punktów (1 punkt = 0.0001). Następnie odrzucono jeszcze dwa przypadki skrajne (o minimalnej i maksymalnej nierówności), ostatecznie kwalifikując do „negocjacji” 7 gier zestawionych w Tabeli 6.

Jak widać, powyższa metoda poszukiwania kompromisu dyktuje wybór gry podwójnej większości z kwotami 14 i 600, która leży w środku między grą Konwentu (13, 600) a grą (15, 600). Jak wiemy, ostatecznie wybrano grę (15, 650), która leży bliżej gry (15, 600) najkorzystniejszej dla krajów mniejszych (od Grecji do Malty). W przypadku UE-27 gra wstawiona do konstytucji leży jednak na prawo od kompromisowego środka (zainteresowanych odsyłam do *Postscriptum* w pliku *komprops.pdf*). Zastosowanie indeksu Shapleya-Shubika (równie popularnego wśród teoretyków jak indeks Banzhafa) daje podobne rozwiązanie.

Którą z gier ekspert powinien podsunąć negocjatorom jako kompromisowe rozwiązanie, przy założeniu, że każdy z nich dąży do maksymalizacji tego samego indeksu siły blokowania, np. $bp(i)$? Problem ten pozostawiam do dalszych badań.

Tabela 6. Wartości indeksu Banzhafa dla wybranych krajów UE-25 dla 7 gier podwójnej większości (1 punkt=0.0001)

Wybrane kraje UE-25	15 600	14 550	15 650	14 600	13 550	14 650	13 600	$\frac{1}{2}(\beta_- + \beta_+)$
Niemcy	875	943	1041	1088	1174	1248	1336	1106
Francja	682	705	759	805	849	901	949	816
Hiszpania	544	568	578	613	640	647	696	620
Holandia	382	381	376	374	378	375	365	374
Grecja	348	341	333	326	317	311	296	322
Dania	313	303	288	273	259	246	227	270
Irlandia	304	294	276	261	244	229	210	257
Malta	280	268	246	226	205	186	164	222
Efektywność (%)	13.1	23.0	10.2	18.2	29.4	13.6	22.5	17.8
Odch. stand.	160	178	208	231	258	283	315	238

W obliczeniach wykonanych w 2004 roku wykorzystano aktualne wówczas dane ludnościowe. Jeśli pozostać przy indeksie Banzhafa, powtórzenie obliczeń nie jest potrzebne, gdyż siła wygrywania mierzona za pomocą tego indeksu nie jest tak wrażliwa na zmianę struktury ludnościowej.

7. UWAGI KOŃCOWE

- **Naukowe badanie systemów politycznych**, tworzonych przez polityków, ewentualnie korzystających z pomocy politologów o kompetencjach prawniczych, **umożliwia matematyczna teoria głosowania. Jej działem o licznych zastosowaniach praktycznych jest teoria gier głosowania.** Na jej gruncie zdefiniowano operacyjnie *siłę głosu* członka zgromadzenia podejmującego decyzje przez głosowanie. Do konstrukcji miar siły głosu wykorzystywano do tej pory przede wszystkim wielkość $ws(i)$ określoną jako liczba *koalicji wygrywających* z udziałem i -tego aktora, takich, że po opuszczeniu przez niego koalicji, zbiór pozostałych koalicjantów przestaje być koalicją wygrywającą.
- Wyżej opisana **klasyczna koncepcja siły głosu jest słabo znana praktykom**, a jeśli już jest znana, to bywa lekceważona, a czasem nawet krytykowana jako mało realistyczna, czyli nieadekwatna jako narzędzie opisu tych cech systemów podejmowania decyzji, które są ważne dla konstruktorów i użytkowników tych systemów. Z drugiej strony, teoretycy niekiedy skłonni są przedstawiać swoje pomysły jako „jedynie naukowo uzasadnione”, a wówczas politycy posądzają ich o platońskie ambicje lub lansowanie rozwiązań służących w istocie interesom ich konkurentów.

- **Winę za brak współpracy ponoszą obie strony.** Politycy z trudem uświadamiają sobie, że *teoria polityki*, w tym matematyczna teoria głosowania, może im jedynie ułatwić ocenę działań konstruktorskich i ich efektów, szczególnie wtedy gdy konstruowane przez nich systemy mają skomplikowaną architekturę. Z kolei uczeni akademicy za mało interesują się nieformalnymi teoriami stosowanymi przez polityków, a przecież mogliby stamtąd czerpać inspirację do własnych badań.
- Najnowsze prace czołowych badaczy gier głosowania wskazują, że przestali już ignorować zjawisko traktowane dotąd jako osobliwość: **rozumienie przez polityków siły głosu jako zdolności blokowania** uchwał proponowanych przez oponentów bardziej niż możliwości narzucania własnych propozycji. Jednak horyzonty myślowe teoretyków wciąż nie wykraczają poza klasyczne miary, spośród których za miarę siły blokowania uchodzi *Preventive Power Index* Colemana ($ws(i)/w$), różniący się od innych miar opartych na $ws(i)$ tylko sposobem normalizacji.
- **Do określenia siły blokowania najlepiej nadają się minimalne koalicje blokujące** („mniejszości blokujące” w języku dokumentów UE). Idea ta wydaje się tak naturalna i oczywista, że autorowi trudno uwierzyć, że to jemu właśnie jako pierwszemu teoretykowi taki pomysł przyszedł do głowy. Tym większa będzie jego satysfakcja, jeśli dokładniejsza kwerenda literatury przedmiotu potwierdzi *priority claim*.
- **Miara siły blokowania zaproponowana w tej pracy opiera się na minimalnych koalicjach blokujących o niewielkiej liczbie członków.** Decyzję, jakiego rozmiaru koalicje tego rodzaju mają być brane pod uwagę przy ocenie siły blokowania, lepiej pozostawić samym użytkownikom teorii. W artykule przedstawiono pewną propozycję matematycznego określenia tego rozmiaru. W grach “unijnych” badanych przez autora małe koalicje blokujące miały od 3 do 5 członków. Zbiór najmniejszych koalicji blokujących zwykle łatwo wyznaczyć bez użycia specjalnego programu komputerowego, ale w ogólności pomoc specjalisty wydaje się niezbędna.
- Mała ilościowa zmiana układu wag (przy zachowanym ich porządku) lub kwoty może niekiedy radykalnie zmienić strukturę wygrywania (np. przejście kilku posłów z jednego klubu parlamentarnego do drugiego może zapewnić temu drugiemu absolutną większość dającą możliwość przeforsowania każdej decyzji). **Klasyczne miary siły głosu, a właściwie siły wygrywania, z reguły jednak mało zmieniają swoje wartości, gdy wagi lub kwota zostaną nieznacznie zmodyfikowane.** Dzieje się tak dlatego, że w ich obliczaniu bierze udział wielka liczba koalicji wygrywających. **Liczba małych koalicji blokujących, która zwykle nie przekracza kilkuset, oraz parametry opisujące siłę aktora jako zależną od liczby koalicji tego rodzaju z jego udziałem są bardziej wrażliwe na małe zmiany,** takie jak np. podniesienie kwoty lub zmiana wagi o 1 punkt. W konsekwencji, projektując grę z zamiarem zrealizowania określonego rozkładu siły blokowania, należy dokładnie zbadać wszystkie wariantowe rozwiązania, korzystając z pomocy eksperta-matematyka.

- Decydując się na wprowadzenie wag populacyjnych, należy wziąć pod uwagę, że niewielkie przesunięcia w rozkładzie ludności UE według państw członkowskich mogą spowodować nieprzewidywalne zmiany w strukturze blokowania. Dlatego należałoby **przełożyć aktualną strukturę ludnościową na układ wag całkowitoliczbowych** (np. sumujących się do 1000, jak w programie autora, lub do 345, jak w traktacie nicejskim) i „zamrozić” ten układ na okres kilku lat do kolejnej aktualizacji.
- System głosowania w UE-15 odznacza się pewną **regularnością struktury blokowania**. Ponadto siła blokowania rośnie wraz z wagą, więc „medialny” współczynnik siły blokowania (*share of blocking minority*) daje wtedy pewne pojęcie o zróżnicowaniu siły w zbiorze graczy. **Podobnej regularności nie udało się osiągnąć, projektując system głosowania dla UE-27**. Być może regularność struktury blokowania w grze dla Piętnastki ma jakiś związek z użyciem wag o stosunkach zgodnych z prawem pierwiastkowym. Problem ten wymaga dalszych badań. **Gdyby się okazało, że wagi pierwiastkowe generują bardziej regularną strukturę blokowania, należałoby odpowiednio poprawić nicejski układ wag**. Powrót do idei wag politycznych wydaje się zresztą nieunikniony, jeśli Turcja ma być kiedyś przyjęta do UE.
- **Projektowanie systemów głosowania politycy powinni powierzyć specjalistom**, ogłaszając otwarty konkurs na projekt spełniający *polityczne* warunki brzegowe uzgodnione przez użytkowników systemu głosowania. Przedmiotem uzgodnień powinien być podział zbioru graczy na kategorie, którym będzie przypisana ta sama waga, oraz porządek tych kategorii według znaczenia lub wpływu przypisywanego poszczególnym kategoriom graczy. Jeśli w UE jest zgoda co do tego, że Niemcy powinny mieć wyższą wagę niż Francja, Wielka Brytania i Włochy, inaczej niż było do tej pory, to należy uzgodnienie to włączyć do warunków brzegowych i pozwolić ekspertom na szukanie rozwiązań. **Rozstrzygnięcie konkursu należy oczywiście do Konferencji Międzyrządowej**.
- UE pozostaje związkiem państw mających częściowo rozbieżne, częściowo zgodne interesy. Reguły podejmowania decyzji przez organy Unii nie powinny być traktowane jako dziedzina, w której dominuje konflikt interesów. Skoro jednak członkowie Unii tak właśnie postrzegają spór o system głosowania w Radzie UE, **niezależni eksperci** przyjąwszy do wiadomości ten fakt, **powinni zaoferować swoją pomoc w rozstrzygnięciu sporu, ukazując pulę możliwych rozwiązań i podpowiadając nie samo rozwiązanie kompromisowe, lecz metody jego poszukiwania**.

Tekst referatu, przedstawionego 22 kwietnia 2006 na konferencji wskazanej na stronie tytułowej, 4 maja 2006 został przekazany organizatorom konferencji oraz umieszczony na stronie domowej autora. Ostatnie poprawki wprowadzone zostały 12 czerwca 2006.

[dopisane w marcu 2007]

7 czerwca 2006 referat posłałem pocztą elektroniczną do MSZ RP, a 9 czerwca 2006 przekazałem do rąk własnych pani Margot Wallström, wiceprzewodniczącej KE, która w tym dniu miała spotkanie z pracownikami i studentami UJ, poświęcone m.in. sprawie przyszłości traktatu konstytucyjnego. Aktualizując dane ze strony tytułowej, informuję, że od 1 października 2006 jestem pracownikiem Akademii Pedagogicznej w Krakowie.

Apendyks [dopisany w czerwcu 2007]

Badanie struktury blokowania w grze konstytucyjnej powtórzyłem po roku przy zastosowaniu nowych danych ludnościowych, publikując wyniki w artykule pt. *Nowa analiza systemów głosowania w Radzie UE* („Międzynarodowy Przegląd Polityczny”, nr 18 (2007/2), ss. 34–52; wersja autorska jest dostępna w pliku tsmpp.pdf). Już po ukazaniu się drukiem mojej analizy prof. Wojciech Słomczyński zwrócił mi uwagę, że błędnie zrekonstruowałem strukturę blokowania w grze konstytucyjnej. Błąd ten popełniłem już w zamieszczonym wyżej referacie, twierdząc (s. 33), iż

Można wykazać, że koalicje blokujące w H są to koalicje blokujące w $H_1 \cap H_2$ liczące co najmniej 4 graczy. Tak więc strukturę blokowania w grze H dostaniemy pomijając kolumnę Tabeli 5, w której podane liczby blokujących trójek z udziałem poszczególnych graczy.

Prawdziwe jest tylko pierwsze zdanie, lecz nie drugie, z którego wynika, że zbiór *minimalnych* blokujących czwórek w grze w $H_1 \cap H_2$, czyli grze konstytucyjnej bez zakazu blokowania trójkowego, pokrywa się ze zbiorem *minimalnych* blokujących czwórek w grze H , czyli w ostatecznie zaakceptowanym wariantcie gry konstytucyjnej. Ten pierwszy zbiór jest oczywiście podzbiorem drugiego, jednak jak zauważył prof. Słomczyński każda blokująca czwórka w $H_1 \cap H_2$ jest minimalna w H , gdyż nie może zawierać trójki blokującej w H , skoro gra H tak właśnie została skonstruowana tak, aby nie było blokujących trójek. Tym samym zbiór minimalnych blokujących czwórek w grze H obejmuje też wszystkie czwórki blokujące w $H_1 \cap H_2$, które nie są minimalne w $H_1 \cap H_2$ jako że zawierają blokujące trójki w $H_1 \cap H_2$.

Obliczenia przedstawione niżej oparte są na nowych oficjalnych danych ludnościowych stosowanych w pierwszym półroczu roku 2007 (przez prezydencję niemiecką). Liczba blokujących trójek w grze „podwójnej większości” z udziałem poszczególnych krajów nie uległa zmianie, natomiast na poziomie czwórkowym doszło do przetasowania. Oto liczba blokujących czwórek z udziałem pierwszej ósemki (w nawiasach podano liczby z Tabeli 5 na s. 32): Niemcy – 30 (36), Francja – 36 (27), W. Brytania – 29 (27), Włochy – 27 (22),

Hiszpania – 37 (29), Polska – 17 (19), Rumunia – 28 (33), Holandia – 11 (10).

Pokażę teraz jak wyznaczyć strukturę blokowania dla gry H . Zacznę od przedstawienia listy wszystkich 10 blokujących trójek w grze $H_1 \cap H_2$ (27 krajów UE reprezentują liczby 1–27; przy każdej trójce w nawiasie podano wagę).

$$\begin{aligned} T_1 &= \{1,2,3\} & (417) \\ T_2 &= \{1,2,4\} & (414) \\ T_3 &= \{1,2,5\} & (384) \\ T_4 &= \{1,2,6\} & (372) \\ T_5 &= \{1,3,4\} & (408) \\ T_6 &= \{1,3,5\} & (378) \\ T_7 &= \{1,3,6\} & (366) \\ T_8 &= \{1,4,5\} & (375) \\ T_9 &= \{1,4,6\} & (363) \\ T_{10} &= \{2,3,4\} & (369) \end{aligned}$$

Zestawienie to zostało wykonane „na papierze” bez pomocy komputera, tak jak to robią politycy. Programem POWERIND (jego nowa *beta version* wciąż nie jest gotowa do udostępniania, ponieważ brak mi czasu na dopisanie procedur prezentacji wyników) posłużyłem się jedynie do wyznaczenia liczb $bm(i,3)$ ($bm(1,3)=9$, $bm(i,3)=5$ dla $i=2,3,4$; $bm(i,3)=3$ dla $i=5,6$).

W grze $H_1 \cap H_2$ możliwość blokowania trójkowego dana jest 6 największym krajom. Aby dla każdego z nich wyznaczyć liczbę wszystkich blokujących (minimalnych w grze z zakazem blokowania trójkowego) czwórek z jego udziałem, należy dodać trzy wielkości: (a) liczbę rozszerzeń trójek z udziałem danego kraju o jeden kraj spoza Szóstki; (b) liczbę rozszerzeń trójek z udziałem danego kraju o kraj należący do Szóstki; (c) obliczoną przez POWERIND liczbę zawierających dany kraj minimalnych blokujących czwórek w grze bez zakazu blokowania trójkowego. Wyznaczenie liczby (a) jest banalnie proste: liczbę trójek trzeba pomnożyć przez $27-6=21$. Dla Niemiec, czyli kraju o numerze 1, otrzymujemy $9 \cdot 21=189$, dla Francji, W. Brytanii i Włoch, $5 \cdot 21=105$, itd.

1	9	189
2	5	105
3	5	105
4	5	105
5	3	63
6	3	63

Zauważmy przy okazji fakt prawdopodobnie nieprzewidziany przez konstruktorów gry konstytucyjnej. Przewaga Niemiec w trójkach, która miała być zredukowana przez zakaz blokowania trójkowego, przenosi się na poziom czwórkowy.

Zestawimy teraz wszystkie podzbiory 4-elementowe zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$. Jest ich ogółem

15. 12 spośród nich zawiera przynajmniej jedną z 10 blokujących trójek (w nawiasie przy każdej czwórce podano wszystkie takie trójki).

C_1	$= \{1,2,3,4\}$	(T_1, T_2, T_5, T_{10})
C_2	$= \{1,2,3,5\}$	(T_1, T_3)
C_3	$= \{1,2,3,6\}$	(T_1, T_4)
C_4	$= \{1,2,4,5\}$	(T_2, T_3, T_8)
C_5	$= \{1,2,4,6\}$	(T_2, T_4)
C_6	$= \{1,2,5,6\}$	(T_3, T_4)
C_7	$= \{1,3,4,5\}$	(T_5, T_6, T_8)
C_8	$= \{1,3,4,6\}$	(T_5, T_7, T_9)
C_9	$= \{1,3,5,6\}$	(T_6, T_7)
C_{10}	$= \{1,4,5,6\}$	(T_8, T_9)
C_{11}	$= \{2,3,4,5\}$	(T_{10})
C_{12}	$= \{2,3,4,6\}$	(T_{10})

Pozostałe czwórki, $C_{13}=\{2,3,5,6\}$, $C_{14}=\{2,4,5,6\}$ i $C_{15}=\{3,4,5,6\}$, nie zawierające blokujących trójek, są minimalnymi blokującymi czwórkami także w grze bez dodatkowej klauzuli, a więc zostaną ujęte w liczbie minimalnych blokujących czwórek wyznaczonej przez program.

Aby wyznaczyć wielkość (b) dla każdego z 6 krajów, należy zbadać do ilu spośród czwórek C_1-C_{12} dany kraj należy. Niemcy, wchodząc w skład czwórek C_1-C_{10} , i w tym przypadku mają przewagę nad pozostałymi 5 krajami. Niżej dla 6 graczy zestawiono liczbę trzech typów czwórek oraz sumę, czyli wielkość, którą chcemy wyznaczyć.

	(a)	(b)	(c)	
1	189	10	30	229
2	105	8	36	149
3	105	8	29	142
4	105	8	27	140
5	63	7	37	107
6	63	7	17	87

Dla pozostałych 21 graczy mamy tylko dwa rodzaje czwórek: czwórki otrzymane przez dołączenie danego kraju do blokującej trójki w grze bez dodanej klauzuli oraz czwórki wyznaczone przez program.

7	10	28	38
8	10	11	21
9	10	8	18
10	10	7	17
11	10	7	17
12	10	7	17

13	10	5	15
14	10	5	15
15	10	3	13
16	10	3	13
17-27	10	0	10

Tak więc gra konstytucyjna H ma jednopoziomową strukturę blokowania: każdy kraj ma możliwość blokowania w czwórkach. Zauważmy, że liczba minimalnych czwórek rośnie wraz z wagą. Gra ta jest więc *formalnie* podobna do pierwszego wariantu gry nicejskiej (kwota 258), lecz politycznie leży na przeciwnym biegunie. Tam mamy bowiem Wielką Szóstkę (z minimalną przewagą Wielkiej Czwórki na Mniejszą Dwójką) zdecydowanie dominującą nad pozostałymi krajami, tu zaś mamy rozbudowany układ hierarchiczny z Niemcami mającymi ogromną przewagę nad Francją i pozostałymi dużymi krajami.

W Tabeli 7 przedstawiono najnowsze dane ludnościowe, oraz wyznaczone na ich podstawie wagi ludnościowe sumujące się do 1000 i wagi pierwiastkowe sumujące się do 345. Następnie zestawiono obok siebie liczby minimalnych blokujących czwórek dla dwu gier, gry konstytucyjnej oraz gry z wagami pierwiastkowymi, zbudowanej tak, aby podobnie jak gra konstytucyjna miała jednopoziomową regularną strukturę blokowania z czwórkami na dole. Aby skonstruować taką grę, zauważmy najpierw, że suma wag pierwiastkowych trzech najsilniejszych krajów jest równa $33+29+28=90$. Aby uniemożliwić blokowanie trójkowe należy zatem ustalić próg blokowania na poziomie 91, co daje kwotę 255, gdyż przy tej kwocie koalicja jest blokująca, jeżeli dysponuje co najmniej $345-255+1=91$ głosami.

Powtarzam tu rozumowanie konstruktorów drugiego wariantu gry nicejskiej. Być może było to rozumowanie nazbyt subtelne dla delegacji niemieckiej, która – widząc, że zabawa z wagami politycznymi nie daje oczekiwanego efektu pokazania Hiszpanom i Polakom, gdzie ich miejsce – walnęła cepem, czyli zażądała wag ludnościowych i progu 62% dyskryminującego Wielką Trójkę.

Zauważmy teraz, że najmniejszą Maltę z wagą pierwiastkową 2 można dołączyć do trójki Niemcy, W. Brytania, Włochy o łącznej wadze $33+28+28$, otrzymując razem 91, czyli próg blokowania. Tak więc kwota 255 rozwiązuje nasz problem.

Analiza danych w Tabeli 7 pokazuje, przy gra pierwiastkowa z kwotą 255 daje największą korzyść Francji, gdyż niweluje przewagę Niemiec. W grze konstytucyjnej Niemcy uczestniczą w 80% blokujących czwórek, podczas gdy Francja w 52%. W grze pierwiastkowej z kwotą 255, odpowiednie liczby wynoszą 73% i 57%. Dla Polski różnica między dwiema gramami jest niewielka (ok. 1%).

Tabela 7. Struktura blokowania w grze konstytucyjnej
i w grze z wagami pierwiastkowymi i kwotą 255

Państwa UE-27	Ludność		Wagi pierw.	Gra konstytucyjna		Gra pierwiastkowa q=255	
	w tys.	waga		$bm(4,i)$	%	$bm(4,i)$	%
1. Niemcy	82438	167	33	229	79.8	174	72.8
2. Francja	62886	128	29	149	51.9	137	57.3
3. W.Brytania	60393	122	28	142	49.5	123	51.5
4. Włochy	58752	119	28	140	48.8	123	51.5
5. Hiszpania	43758	89	24	107	37.3	94	39.3
6. Polska	38157	77	22	87	30.3	74	31.0
7. Rumunia	21610	44	17	38	13.2	27	11.3
8. Holandia	16334	33	15	21	7.3	20	8.4
9. Grecja	11125	23	12	18	6.3	17	7.1
10. Portugalia	10570	21	12	17	5.9	17	7.1
11. Belgia	10511	21	12	17	5.9	17	7.1
12. Czechy	10251	21	12	17	5.9	17	7.1
13. Węgry	10077	20	11	15	5.2	13	5.4
14. Szwecja	9048	18	11	15	5.2	13	5.4
15. Austria	8266	17	10	13	4.5	12	5.0
16. Bułgaria	7719	16	10	13	4.5	12	5.0
17. Dania	5427	11	8	10	3.5	10	4.2
18. Słowacja	5389	11	8	10	3.5	10	4.2
19. Finlandia	5256	11	8	10	3.5	10	4.2
20. Irlandia	4209	8	7	10	3.5	8	3.3
21. Litwa	3403	7	7	10	3.5	8	3.3
22. Łotwa	2295	5	5	10	3.5	4	1.7
23. Słowenia	2003	4	5	10	3.5	4	1.7
24. Estonia	1345	3	4	10	3.5	3	1.3
25. Cypr	766	2	3	10	3.5	3	1.3
26. Luksemburg	460	1	2	10	3.5	3	1.3
27. Malta	404	1	2	10	3.5	3	1.3
	492852	1000	345	287		239	

Apendyks ten napisałem w dniach 18–19 czerwca 2007, wykorzystując list elektroniczny, który wysłałem 10 czerwca prof. Słomczyńskiemu w odpowiedzi na jego na list z dnia poprzedniego. Mojemu znakomitemu koledze pragnę w tym miejscu jeszcze raz podziękować za uważną lekturę mojego artykułu i wytropienie błędu.



24/06/07