Tadeusz Sozański

Paradoksy preferencji grupowych: twierdzenia Arrowa i Sena

Notatka dla słuchaczy kursu

Teoria gier i decyzji z elementami teorii wyboru społecznego

Maj 1993 – Maj 2004

Profile preferencji

Niech $X=\{x_1,\ldots,x_m\}$ oznacza zbiór *opcji* (zwanych też „alternatywami społecznymi”), zaś $N=\{1,\ldots,n\}$ zbiór *decydentów* (lub, przy drugiej interpretacji, zbiór kryteriów, które jeden decydent stosuje do oceny opcji). Zbiór *relacji preferencji* na X oznaczmy $\boldsymbol{R}$; $R\in\boldsymbol{R}$ wtedy i tylko wtedy, z definicji, gdy relacja R jest *zwrotna* (xRx), *przechodnia* (xRy i yRz pociąga za sobą xRz) i *spójna* (xRy lub yRx). Niech P i I oznaczają odpowiednio podyktowane przez R relacje *preferencji ścisłej* (xPy wtedy i tylko wtedy gdy xRy i $-yRx$) i indyferencji (xIy wtedy i tylko wtedy gdy xRy i yRx).

Przykład. Niech $X = \{x,y,z\}$. Zbiór $\boldsymbol{R}$ ma wtedy 13 elementów. Są to relacje, które można zanotować następująco

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}
x	x	y	y	z	z	x	y	z	x-y	x-z	y-z	x-y-z
y	z	x	z	x	y	y-z	x-z	x-y	z	y	x	
z	y	z	x	y	x							

Dla R_1 mamy xP_1y, yP_1z (opcja x jest przedkładana ponad y, a y ponad z), a z przechodniości xP_1z. Relacja indyferencji I_1 zachodzi tylko między elementami identycznymi. W R_7 mamy xP_7y i xP_7z (x jest lepsze od y i z) oraz yI_7z (opcje y i z są jednakowo dobre).

Załóżmy, że zbiór N ma conajmniej dwa elementy ($n\geq 2$). *Profilem preferencji indywidualnych* w zbiorze N nazywamy każdą uporządkowaną n-tkę $(R_1,\ldots,R_n)$ elementów $\boldsymbol{R}$. Relację R_i (nie mylić z oznaczeniami zastosowanymi w przykładzie) interpretujemy jako relację preferencji, którą posługuje się i-ty decydent porównując opcje ze zbioru X (lub relację odpowiadającą i-temu kryterium oceny opcji stosowanemu przez jednego decydenta). Zbiór profili oznaczmy $\boldsymbol{R}^n$. Dla $n=2$ zbiór ten liczy więc $13\cdot 13=169$ elementów.

Niech zbiór $\boldsymbol{D}$ oznacza niepusty podzbiór $\boldsymbol{R}^n$ złożony z profili określonych jako *dopuszczalne*, czyli te które teoretycznie mogą pojawić się w grupie N. Zbiór $\boldsymbol{D}$ może zawierać profile, w których występuje konflikt preferencji. Dla przykładu załóżmy, że $N=\{1,2,3\}$, $X=\{x,y,z\}$. Rozważmy następujący profil.

R_1	R_2	R_3
x	y	z
y	z	x
z	x	y

Mamy zatem trzy osoby, z których każda na pierwszym miejscu stawia inną opcję. Powstaje pytanie jak skonstruować wspólną dla trójosobowej grupy relację opisującą kompromisowy sposób wartościowania tych opcji przez grupę jako całość, umożliwiający też grupie wybranie najlepszego elementu spośród elementów danego podzbioru Y zbioru X. Z pozoru najwłaściwszym rozwiązaniem wydaje się zastosowanie reguły zwykłej większości do porównywania opcji parami. Zauważmy, że dwie osoby (1 i 3) wolą x od y, jak również dwie osoby (1 i 2) wolą y od z, a zatem grupa powinna przedkładać opcję x nad y, a y nad z. Jeśli określona w ten sposób relacja miałaby być przechodnia, wówczas trójka powinna przedkładać x nad z. Tymczasem jest odwrotnie, bo dwie osoby (2 i 3) wolą z od x. Fakt ten pierwszy zauważył markiz Antoine de Condorcet (odkryłby może jeszcze inne fakty, lecz w 1794 roku padł ofiarą jakobińskiego terroru).

Funkcja społecznego dobrobytu

Jeśli relacja preferencji przypisana grupie ma mieć te same własności co relacja wyrażająca wartościowanie jednostki, a więc w szczególności ma być przechodnia, wówczas reguła zwykłej większości nie spełnia swojego zadania. Kenneth Arrow, autor *Social Choice and Individual Values* (1951), uznał, że wartościowanie grupowe powinno być przechodnie, co oznacza, że rozwiązaniem problemu może być jedynie funkcja, która każdemu dopuszczalnemu profilowi przypisuje jakąś relację preferencji na zbiorze X, a więc z założenia relację przechodnią.

Funkcję postaci $F{:}\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$ Arrow nazwał *funkcją społecznego dobrobytu* (*social welfare function*). Relacja $R=F(R_1,\ldots,R_n)$ przyporządkowana dopuszczalnemu profilowi $(R_1,\ldots,R_n)$ interpretowana jest jako sposób wartościowania opcji, który powinna zastosować grupa, jeśli jej członkowie indywidualnie oceniają opcje posługując się odpowiednio relacjami $R_1,\ldots,R_n$. Przedmiotem badań Arrowa były warunki, jakie powinny spełniać każda „demokratyczna” funkcja społecznego dobrobytu. Główne twierdzenie, które zostanie niżej przedstawione, stwierdza niemożność pogodzenia ze sobą kilku postulatów, które z osobna wzięte wydają się „rozsądne”. Pierwszym takim postulatem jest żądanie, by reguła wyznaczania preferencji grupowej miała najszerszy możliwy zakres stosowalności. Postulat ten oznaczymy numerem 0, gdyż jest najbardziej elementarny; wyznacza on jedynie dziedzinę funkcji F i nie przesądza sposobu jej określenia.

Postulat 0 (nieograniczoność dziedziny).

$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{R}^n$.

Postulat ten głosi, że dopuszczalny jest *każdy* profil preferencji indywidualnych.

Niezależność od alternatyw nieistotnych

Do sformułowania następnych postulatów będą potrzebne dalsze definicje. Niech Y będzie niepustym podzbiorem zbioru opcji X ($\varnothing \neq Y \subset X$) in niech R i R' będą dwoma relacjami preferencji na X (R, $R' \in \boldsymbol{R}$).

Definicja 1 (zgodności relacji i profili na podzbiorze opcji)

R i R' są zgodne na Y wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x,y \in Y}$: $xRy \Leftrightarrow xR'y$

Dwa profile $(R_1,\ldots,R_n)$, $(R'_1,\ldots,R'_n)$ są zgodne na Y wtedy i tylko wtedy, gdy R_i i R'_i są zgodne na Y dla $i=1,\ldots,n$.

Przypuśmy np. że dwa profile opisują oceny poszczególnych członków grupy w wyrażone w dwu kolejnych badaniach. Zgodność na Y oznacza, że każdy członek grupy zachował swoje poprzednie uporządkowamie elementów zbioru Y. Ewentualne różnice mogły się pojawić jedynie przy porównywaniu opcji należących do zbioru Y z pozostałymi opcjami (elementami X-Y) oraz przy porównywaniu między sobą opcji spoza Y. Wydaje się naturalne żądać, by w takiej sytuacji grupa jako całość zachowała się tak jak poszczególni członkowie, tzn. nie zmieniała wartościowania elementów Y.

Postulat 1 (niezależność od alternatyw nieistotnych).

Dla dowolnego niepustego podzbioru Y zbioru X, jeśli dowolne dwa dopuszczalne profile $(R_1,\ldots,R_n)$, $(R'_1,\ldots,R'_n)$ są zgodne na Y to odpowiadające im relacje grupowe $R=F(R_1,\ldots,R_n)$ i $R'=F(R'_1,\ldots,R'_n)$ są także zgodne na Y.

W szczególności zbiór Y może mieć postać $\{x,y\}$. Postulat niezależności od alternatyw nieistotnych (mówi się też „niezwiązanych”, ang. *independence of irrelevant alternatives*) oznacza wówczas, że dla dowolnych dwu różnych opcji x i y to, czy grupa woli x od y, zależy wyłącznie od tego, jak wyglądają preferencje poszczególnych członków grupy w odniesieniu do tych dwu elementów bez względu na kontekst. Nieistotne jest zatem jak dane dwa elementy mieszczą się w ogólnej hierarchii wartości danego decydenta, lecz jedynie to, która z nich dwu jest dlań lepsza.

Demokracja

Kolejny postulat uważany jest również za „rozsądny”. Idzie w nim o to, by „demokratycznie” uzgodniona preferencja grupy maksymalnie wyrażała preferencje indywiduów i była wrażliwa na zmianę „układu sił”, tzn. jeśli więcej osób indywidualnie opowie się za jakąś opcją przeciw innej opcji to opinia grupy jako całości powinna przechylić się w tę samą stronę. Jeśli przy pewnym profilu preferencji indywidualnych grupa woli x od y, to preferencja grupowa dla tej pary opcji nie ulegnie odwróceniu, gdy wzrośnie poparcie dla x, tzn. gdy profil ten zmieni się tak, że więcej osób będzie wolało x od y. Bardziej formalnie wyraża to następująca definicja. Niech $R,R'\in\boldsymbol{R}$.

Definicja 2 (demokratycznego poparcia)

W *R' jest nie mniejsze poparcie dla x przeciw y niż w R* wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą dwie implikacje

$xPy\Rightarrow xP'y$
$xIy\Rightarrow(xI'y$ lub $xP'y)$

Jeśli zatem według relacji R opcja x jest lepsza od y, to także według relacji R' opcja x jest lepsza od y. Jeśli zaś według relacji R opcje x i y są jednakowo dobre, to według relacji R' jest tak samo lub opcja x jest uważana za lepszą od y. Zauważmy, że jeśli według relacji R opcja y jest gorsza od x (yPx), to poprzednik obu implikacji jest fałszywy, a zatem bez względu na to jak wartościowane są opcje x i y według relacji R', w R' jest nie mniejsze poparcie dla x przeciw y niż w R.

Jeśli relacje R i R' przypisane są jednej osobie, wówczas stosunek między nimi opisuje ewentualną zmianę poglądów jednostki idącą w określonym kierunku. Jeśli dana osoba wolała x od y, to zmiany nie ma, musi nadal przedkładać x nad y. Jeśli osoba ta była początkowo indyferentna, może pozostać taka, jeśli jednak zmieni zdanie, to będzie to uznanie x za opcję lepsza od y. Jeśli wolała y od x, wszelka zmiana (na indyferencję lub przeciwną preferencję) daje przewagę x. Kolejny postulat powiada, że jeśli zmiana w tym samym kierunku zachodzi u każdej osoby (niekoniecznie zmiana musi być jednakowo radykalna u wszystkich), wówczas preferencja grupowa odpowiadająca nowemu profilowi powinna to odzwierciedlać.

Postulat 2 (demokratyczne określanie preferencji zbiorowych)

Dla każdej uporządkowanej pary opcji (x,y): jeśli dla każdego i poparcie dla x przeciw y w R'_i jest nie mniejsze niż w R_i, to w $R'=F(R'_1,\ldots,R'_n)$ jest nie mniejsze poparcie dla x przeciw y niż w $R=F(R_1,\ldots,R_n)$.

Postulat ten formalnie oddaje istotną cechę ładu demokratycznego. Grupa powinna iść za głosem swoich członków, czy jednak może uchwalić dowolną hierarchię wartości, jeśli tylko znajdzie się dla niej wystarczające „społeczne poparcie"?

Suwerenność grupy

Zasadę „suwerenności ludu" także uważa się za istotny składnik demokracji. Aby nadać formalny sens pojęciu suwerenności w kontekście teorii Arrowa, musimy podać dalsze definicje. Niech M będzie podzbiorem zbioru decydentów N (niekoniecznie niepustym), a (x,y) uporządkowaną parą różnych opcji.

Definicja 3 (zbioru rozstrzygającego)

M nazywa się *zbiorem rozstrzygającym dla x przeciw y ze względu na funkcję społecznego dobrobytu F* wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{(R1,\ldots,Rn)\in\boldsymbol{D}}$ $(\forall_{i\in N}$ $(i\in M\Rightarrow xP_iy)\Rightarrow xPy)$, gdzie P odpowiada $R=F(R_1,\ldots,R_n)$

Definicja ta oznacza, że jeśli wszyscy członkowie zbioru M wolą x od y, to są w stanie narzucić grupie N jako całości swój wybór. Także wtedy, gdy pozostali decydenci mają wszyscy dokładnie odwrotne preferencje, tzn. jeśli mamy do czynienia z profilem takim, że xP_iy dla $i\in M$ i yP_ix dla $i\in N-M$. Dla reguły F wrażliwej na preferencje indywidualne (czyli spełniającej postulat 2), aby sprawdzić, czy jakiś zbiór jest rozstrzygający dla x przeciw y, wystarczy sprawdzić tylko profile o takiej spolaryzowanej postaci.

W definicji 3 dopuszczamy także przypadek, gdy zbiór rozstrzygający dla x przeciw y jest pusty. Mamy wówczas xPy dla każdego dopuszczalnego profilu, a jeśli przyjmiemy postulat 0 dopuszczający wszystkie możliwe profile, to wybór grupowy xPy musiałby mieć miejsce także wtedy, gdy dla każdego $i\in N$ mamy yP_ix. Jeśli chcemy uniknąć takiej sytuacji (x zostaje uznane za lepsze od y, np. ze względów etycznych, chociaż wszyscy wolą y od x) musimy nałożyć na funkcję F dodatkowe ograniczenie.

Postulat 3 (nieograniczona suwerenność grupy)

Dla każdych różnych $x,y\in X$ istnieje profil $(R_1,\ldots,R_n)\in\boldsymbol{D}$ taki, że xPy, gdzie P odpowiada $R=F(R_1,\ldots,R_n)$

Postulat ten głosi, że dla dowolnych dwu różnych opcji istnieje dopuszczalny profil taki, że odpowiadająca mu relacja grupowa uznaje pierwszą opcję za lepszą od drugiej. Równoważnie: nie istnieją różne opcje x i y takie, że zbiór pusty jest rozstrzygający dla x przeciw y, czyli x byłoby zawsze przedkładane nad y niezależnie od zróżnicowania poglądów w grupie. Suwerenność scharakteryzowana za pomocą postulatu 3 nie jest niczym ograniczona, grupa może uznać, że x jest lepsze od y lub y jest lepsze od y. Żadne rozwiązanie nie może być grupie narzucone z góry (przez wolę jednostkową lub jakąś normę moralną). Aby zostało wybrane, wystarczy jedynie wytworzenie się odpowiedniego profilu preferencji indywidualnych.

Jeśli funkcja F spełnia postulaty 2 i 3, wówczas cała grupa jest zbiorem rozstrzygającym dla każdej opcji x przeciw każdej innej opcji y. Wniosek ten, formułowany często jako osobny postulat, zwany postulatem albo warunkiem Pareto, uważa się także za fundamentalny dla rozumienia demokracji.

Postulat demokracji Pareto (poszanowanie jednomyślności)

Dla każdych dwu różnych $x,y \in X$ i każdego $(R_1,\ldots,R_n) \in \boldsymbol{D}$, ($xP_iy$ dla $i=1,\ldots,n \Rightarrow xPy$)

Inaczej mówiąc, jeśli każdy członek grupy woli *x* od *y*, to grupa jako całość musi respektować tę powszechną zgodę.

Udowodnimy teraz, że warunek Pareto rzeczywiście wynika z postulatów 2 i 3. Niech *x* i *y* będą dwoma różnymi opcjami, zaś $(R_1,\ldots,R_n)$ dowolnym profilem takim, że xP_iy dla każdego *i*. Profil ten ma tę własność, że dla każdego profilu $(R'_1,\ldots,R'_n)$ *y* ma przeciw *x* w każdej relacji R'_i niemniejsze poparcie niż w relacji R_i. Postulat 2 implikuje zatem, że w $R'=F(R'_1,\ldots,R'_n)$ jest nie mniejsze poparcie dla *y* przeciw *x* niż w $R=F(R_1,\ldots,R_n)$. Mamy wykazać, że *xPy*. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy najpierw, że *yPx*. Ponieważ w *R′* jest niemniejsze poparcie dla *y* przeciw *x* niż w *R*, więc musi być *yP′x*. Profil, któremu funkcja *F* przypisuje relację *R′,* był jednak dowolnie dobranym profilem dopuszczalnym, a więc konkludujemy, że *yP′x* dla każdego profilu w ***D***, co jest sprzeczne z postulatem 3. Z kolei przypuśćmy, że *yIx* (przypomnijmy, że są trzy możliwości: xPy, *xP*y*, czyli *yPx*, oraz *xIy* równoważne *yIx*; aby udowodnić, że zachodzi pierwsza możliwość, musimy wykazać, że pozostałe dwie prowadzą do sprzeczności). Wynika stąd (w związku z niemniejszym poparciem dla *y* przeciw *x* w *R′* niż w *R*), że *yI′x* lub *yP′x*. Nie ma więc takiego profilu, dla którego *xP′y* wbrew postulatowi 3.

Zauważmy jeszcze, że postulat nieograniczonej suwerenności grupy daje się wyprowadzić z postulatu Pareto i postulatu nieograniczoności dziedziny. Istotnie, nieograniczoność dziedziny oznacza, że profil preferencji taki że xP_iy dla $i=1,\ldots,n$ jest dopuszczalny, a postulat Pareto implikuje z kolei, że dla tego profilu musi być *xPy*.

Paradoks Arrowa

Wszystkie cztery postulaty (0-3) wydają się rozsądne jako formalne wymogi, jakie powinna spełniać „demokratyczna” procedura wyprowadzania wartościowania społecznego z indywidualnych ocen. Rzecz w tym, że łącznie implikują one zaprzeczenie demokracji, czyli dyktaturę, jeśli tylko zbiór opcji ma co najmniej 3 elementy. Na tym właśnie polega słynny paradoks odkryty przez Arrowa.

Dyktator to jednoelementowy zbiór rozstrzygający dla każdej uporządkowanej pary opcji. Formalna definicja wygląda następująco.

Definicja 4 (dyktatury)

Osoba *i* nazywa się *dyktatorem ze względu na F* wtedy i tylko wtedy, gdy {*i*} jest zbiorem rozstrzygającym dla każdej opcji *x* przeciw każdej innej opcji *y*.

Funkcja społecznego dobrobytu F nazywa się *dyktatorską* wtedy i tylko wtedy, gdy w grupie *N* istnieje osoba *i* będąca dyktatorem ze względu na *F*.

Tak więc, jeśli *i* jest dyktatorem, to dla dowolnych dwu różnych opcji *x* i *y* i dowolnego profilu $(R_1,\ldots,R_n)$ stąd, że xP_iy, wynika, że *xPy*, gdzie *P* pochodzi od $R=F(R_1,\ldots,R_n)$. Dyktatura oznacza, że niezależnie od zapatrywań wszystkich osób wyjąwszy *i*-tą, grupa zawsze (przy porównaniu każdej pary opcji) zmuszona jest mocą reguły przyjąć punkt widzenia jednej i zawsze tej samej osoby. Łatwo wykazać, że jeśli grupa ma dyktatora, może nim być tylko jedna osoba. Ponieważ osoba ta rozstrzyga każdy dylemat, dyktatura tak zdefiniowana zasługuje na miano „totalitarnej”.

Twierdzenie 1 (Arrowa)

Jeśli $m \geq 3$, *to dowolna funkcja społecznego dobrobytu F spełniająca postulaty* 0, 1,2 i 3 *jest dyktatorska*.

W równoważnym sformułowaniu twierdzenie Arrowa głosi, że przy $m \geq 3$ postulaty 0-3 oraz postulat 4 – wykluczenia dyktatury – są ze sobą sprzeczne. W literaturze spotyka się często inny wariant twierdzenia Arrowa, w którym zamiast postulatów 2 (demokracji) i 3 (suwerenności) występuje postulat Pareto. Paradoksalność tego wyniku jest jeszcze bardziej uderzająca. Oto bowiem trzy naturalne warunki, nieograniczoność zakresu stosowalności demokratycznej procedury, przetwarzanie indywidualnych hierarchii wartości na hierachię grupową w sposób „lokalny”, oraz postulat poszanowania jednomyślności, dają się pogodzić tylko wtedy, gdy członkowie grupy podporządkują się dyktatorowi.

Dowód twierdzenia Arrowa

Dowód twierdzenia (oparty na podanym w książce Luce'a i Raiffy *Gry i decyzje*) jest elementarny, aczkolwiek nieco żmudny. Osoby mniej zainteresowane wywodami matematycznymi a bardziej „ideologicznymi” implikacjami twierdzenia Arrowa mogą go pominąć.

Niech M oznacza minimalny podzbiór zbioru N, będący zbiorem rozstrzygającym dla pewnego x przeciw pewnemu $y \neq x$. Minimalność oznacza, że żaden właściwy podzbiór M' zbioru M nie ma już tej własności, tzn. nie istnieją różne między sobą opcje x' i y' takie, że M' jest rozstrzygający dla x' przeciw y'. Zbiór N na mocy postulatu Pareto (wyprowadzonego wcześniej z postulatów 2 i 3) jest rozstrzygający dla każdego x przeciw każdemu y, posiada więc (z nadmiarem) żądaną własność, nie musi być wszakże minimalny. Jeśli nie jest, zbiór M konstruujemy, usuwając z N kolejne elementy, aż dostaniemy zbiór, który nie będzie już rozstrzygający dla żadnej opcji przeciw innej opcji. Zbiór M nie może być pusty, bo w przeciwnym wypadku pogwałcony byłby postulat 3 (nieograniczonej suwerenności grupy).

Przypuśćmy, że M jest zbiorem rozstrzygającym dla x przeciw y, gdzie x i y są dwoma różnymi ustalonymi opcjami. Najpierw pokażemy, że M jest zbiorem rozstrzygającym nie tylko dla x przeciw y, ale dla każdej opcji przeciw każdej innej opcji. Gdy to zostanie dowiedzione, udowodnimy z kolei, że zbiór M musi być jednoelementowy, co oznacza dyktaturę.

Zaczniemy od dowodu, że M jest zbiorem rozstrzygającym dla ustalonego x przeciw każdemu x' różnemu od x. Jeśli $x'=y$, wynika to z założenia o M. Pozostaje więc zbadać przypadek $x' \neq y$. Rozważmy dowolny profil taki, że xP_ix' dla każdego $i \in M$. Mamy wykazać, że xPx', czyli cała grupa przejmuje punkt widzenia podgrupy M. Dodatkowo możemy założyć, że rozważany profil spełnia warunek $x'P_ix$ dla każdego $i \in N\text{-}M$. Jeśli bowiem dla takiego profilu udowodnimy, że xPx', to z uwagi na postulat 2, to samo otrzymamy dla każdego profilu takiego, że xP_ix' dla każdego $i \in M$, gdyż w każdym takim profilu poparcie dla x przeciw x' jest niemniejsze niż w profilu, w którym wszyscy członkowie $N\text{-}M$ wolą x' od x. Ponadto, z uwagi na postulat 1 (niezależność od alternatyw nieistotnych; w tym przypadku istotne są tylko x i x') profil postaci [wszyscy w M za x przeciw x', wszyscy w $N\text{-}M$ za x' przeciw x] można wyposażyć w dodatkowe własności, zakładając w szczególności, że opcja y jest położona w szczególny sposób w stosunku do opcji x i x'. Postulat nieograniczoności dziedziny gwarantuje nam, że wszystkie profile, skonstruowane na poszczególnych etapach dowodu są dopuszczalne. Profil potrzebny nam teraz będzie miał postać następującą.

M	$N\text{-}M$
x	y
y	x'
x'	x

Powyższy zapis oznacza, że wszyscy członkowie podgrupy M mają identyczne preferencje, i to samo zakłada się o członkach podgrupy $N\text{-}M$. Ponadto zaznaczono jedynie preferencje w obrębie zbioru $Y=\{x,y,x'\}$; wewnątrz zbioru $X\text{-}Y$ i między zbiorami Y i $X\text{-}Y$ preferencje także muszą być jakoś określone dla każdej osoby, lecz na mocy postulatu 1 nie ma to wpływu na to jak relacja grupowa odpowiadająca temu profilowi szereguje elementy zbioru Y.

Zauważmy że yP_ix' dla każdego $i \in N$, a więc z warunku Pareto mamy yPx'. Zauważmy dalej, że

xP_iy dla $i \in M$, skąd z uwagi na to, że M jest zbiorem rozstrzygającym dla x przeciw y wynika, że xPy. Korzystamy teraz z przechodniości P, wnioskując z xPy i yPx', że xPx'. W ten sposób dowiedliśmy, że M jest zbiorem rozstrzygającym dla x przeciw każdemu $x' \neq x$.

W następnym kroku dowiedziemy, że M jest zbiorem rozstrzygającym dla dowolnego x'' przeciw dowolnemu x', gdzie x' i x'' są dowolnymi opcjami różnymi od x. Rozważmy profil taki, że $x''P_ix'$ dla każdego $i \in M$ i $x'P_ix''$ dla każdego $i \in N\text{-}M$. Trzeba wykazać, że $x''Px'$. Jak poprzednio skonstruujemy profil z dodatkową opcja, którą teraz będzie x.

M	*N-M.*
x''	x'
x	x''
x'	x

Dla profilu tego mamy $x''P_ix$ dla każdego $i \in N$, a zatem $x''Px$ z warunku Pareto. Z kolei odnotujmy, że dla każdego $i \in M$ spełniony jest warunek xP_ix' Z udowodnionej wyżej rozstrzygalności M dla x przeciw dowolnemu $x' \neq x$ wynika, że xPx'. Z przechodniości P mamy $x''Px'$.

Aby zakończyć dowód tego, że M jest zbiorem rozstrzygającym dla każdej opcji przeciw każdej innej opcji, należy jeszcze rozważyć przypadek x'' przeciw x, gdzie x'' jest dowolną opcją różną od x. W tym celu konstruuje się następujący profil

M	*N-M*
x''	x'
x'	x
x	x''

z dodatkową opcją x' różną od x i x'' i rozumowanie przebiega podobnie z wykorzystaniem warunku Pareto, rozstrzygalności dla przypadków rozważanych wcześniej oraz przechodniości P.

Do zakończenia dowodu twierdzenia Arrowa pozostało pokazanie, że M jest zbiorem jednoelementowym. Niech j będzie elementem M i niech $M'=M\text{-}\{j\}$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że zbiór M' jest niepusty. Utwórzmy profil

{j}	*M'*	*N-M*
x	z	y
y	x	z
z	y	x

gdzie x, y i z są dowolnymi trzema różnymi elementami X (założyliśmy, że zbiór X zawiera co najmniej 3 opcje). Mamy teraz xP_iy dla każdego $i \in M=\{j\} \cup M'$, a stąd xPy, ponieważ M jest rozstrzygający dla x przeciw y.

Zauważmy, że zP_iy dla każdego $i \in M'$ oraz yP_iz dla każdego $i \in N\text{-}M'$. Gdyby było zPy dla tego profilu, to i dla każdego innego profilu zgodnego z nim na zbiorze $\{z,y\}$; x oraz wszelkie inne opcje są tu nieistotne. To jednak oznaczałoby, że M' jest rozstrzygający dla z przeciw y, co być nie może, albowiem zbiór M został skonstruowany jako minimalny zbiór rozstrzygający dla jakiejś opcji przeciw innej opcji. Musi być zatem $\text{-}zPy$, czyli yPz lub yIz. Razem z xPy implikuje to xPz. Z drugiej strony mamy xP_jz, co w połączeniu z xPz prowadzi to do wniosku, że $\{j\}$ jest zbiorem rozstrzygającym dla x przeciw z, a zatem M nie jest minimalny. Otrzymujemy sprzeczność, która kończy dowód twierdzenia Arrowa.

Komentarz do twierdzenia Arrowa

Twierdzenie Arrowa było i jest wykorzystywane przez konserwatystów do ataku na demokrację (patrz załączony felieton J. Korwina-Mikkego) jako na ustrój polityczny *logicznie* (nie tylko społecznie lub fizycznie) niemożliwy do zrealizowania. Konserwatyście w demokracji najbardziej nie podoba się doktryna suwerenności ludu, suwerenności niczym nieograniczonej, nawet normami moralnymi. Według demokratów, w kwestiach spornych takich jak np. aborcja ze względów społecznych i kara śmierci, prawo stanowione powinno wyrażać wolę obywateli. Jeśli ludzie jednomyślnie opowiadają się za jedną opcją legislacyjną przeciw innej (zakaz/dopuszczalność jakiejś praktyki), wówczas grupa powinna wybrać opcję zgodnie preferowaną przez swoich członków. W praktyce oczywiście demokraci nie żądają jednomyślności, wystarcza im większość zwykła lub kwalifikowana.

Pozostałe postulaty Arrowa także mogą budzić wątpliwości. Zakwestionować można w szczególności nałożenie na racjonalność zbiorową tych samych formalnych wymogów, zwłaszcza przechodniości, które ma spełniać racjonalność indywidualna. Kłopoty z przechodniością znikają, gdy zbiór opcji X ma tylko dwa elementy. W dowodzie twierdzenia Arrowa istotną rolę odgrywa założenie, że $m \geq 3$. Gdy $m=2$, paradoks demokracji nie występuje. I w rzeczy samej, demokracja parlamentarna najlepiej funkcjonuje w krajach anglosaskich, gdzie wytworzył się i ugruntował system dwupartyjny.

Liberalizm

W pewnych sytuacjach zbiór „alternatyw społecznych” (X) z natury musi jednak liczyć więcej elementów, „socjologicznie” interpretowanych jako rozmaite stany rzeczy pojawiające się we wspólnym otoczeniu grupy ludzi (N) i wartościowane przez nich indywidualnie. Określenie „alternatywa *społeczna”* wskazuje tu, że zbiór X składa się ze stanów, których zaistnienie nie jest obojętne dla członków danej grupy, choć oczywiście nie musimy zakładać, że każdy stan każdego jednakowo obchodzi. Kiedy mój sąsiad pomaluje sobie drzwi do swojego mieszkania od zewnątrz na czerwono, bo woli ten kolor od białego, ja zaś preferuję biel na każdych drzwiach, mogę mu zwrócić uwagę, że zmusił mnie do oglądania nieprzyjemnego widoku, ilekroć przechodzę obok „jego” drzwi, które od zewnątrz stanowią część przestrzeni wspólnej, a więc nie może z nimi robić co zechce. Spotykając się z sąsiadem w jego mieszkaniu od czasu do czasu i widząc, że i tam zrealizował swoje upodobania kolorystyczne, pogodzę się z dyskomfortem, jednak tym razem nie będę się odzywał, bo to w końcu nie moja sprawa: wolnoć Tomku w swoim domku. Nie chciałbym przecież, by i on mnie pouczał jak mam pomalować ściany w swoim mieszkaniu. Inaczej mówiąc, jako *liberał* życzę sobie, by moje preferencje w tym zakresie zostały uszanowane przez dwuosobową grupę, a choćbym był fundamentalistycznym wyznawcą tezy, że biel jest zawsze lepsza od czerwieni, takie samo prawo przyznam sąsiadowi: niech grupa zaakceptuje prywatne preferencje każdej osoby w przyznanym jej obszarze suwerennego decydowania.

Załóżmy, że zbiór N składa się z dwu osób, a zbiór X z 16 stanów otoczenia opisanych za pomocą 4 współrzędnych przyjmujących 2 wartości: B (biel) i C (czerwień). Pierwsze dwie współrzędne niech opisują kolor ścian i drzwi do mieszkania pierwszej osoby, następne dwie - to samo dla mieszkania drugiej osoby. Przykładowo, czwórka (B,C,B,B) oznacza, że sąsiad 1 pomalował swoje mieszkanie na biało, a drzwi wejściowe na czerwono, natomiast sąsiad 2 jedno i drugie pomalował u siebie na biało. Oto przykładowa relacja preferencji osoby 1

$x_1=(B,B,B,B)$ - $x_2=(B,B,C,B)$
$x_3=(B,B,B,C)$ - $x_4=(B,B,C,C)$
$x_5=(B,C,B,B)$ - $x_6=(B,C,C,B)$
$x_7=(B,C,B,C)$ - $x_8=(B,C,C,C)$
$x_9=(C,B,B,B)$ - $x_{10}=(C,B,C,B)$
$x_{11}=(C,B,B,C)$ - $x_{12}=(C,B,C,C)$
$x_{13}=(C,C,B,B)$ - $x_{14}=(C,C,C,B)$
$x_{15}=(C,C,B,C)$ - $x_{16}=(C,C,C,C)$

Osoba 1 za najlepsze, a przy tym jednakowo dobre, uważa dwa stany rzeczy: x_1=(*B,B,B,B*) i x_2=(*B,B,C,B*). Stan x_1 oznacza powszechne panowanie bieli, stan x_2 różni się od x_1 jedynie tym, że osoba 2 pomalowała sobie mieszkanie na czerwono; dla osoby 1, która jest liberałem, różnica ta nie ma jednak znaczenia. Na drugim miejscu osoba 1 jednakowo ceni dwa stany: x_3=(*B,B,B,C*) i x_4=(*B,B,C,C*), które jej zdaniem gorsze są od x_1 i x_2, ponieważ sąsiad pomalował sobie drzwi na czerwono, a kolor drzwi w przeciwieństwie do koloru wnętrza ma znaczenie dla osoby 1. Kolejne stany rzeczy, x_5=(*B,C,B,B*) i x_6=(*B,C,C,B*), gorsze są dla osoby 1 od x_3 i x_4, bo to jej drzwi zostały pomalowane na czerwono, zaś lepsze od stanów x_7=(*B,C,B,C*) i x_8=(*B,C,C,C*), bo przynajmniej u sąsiada zastosowano właściwy kolor. Z kolei wyższość stanów x_5, x_6, x_7 i x_8 nad stanami x_9, x_{10}, x_{11} i x_{12} oznacza, że osoba 1 za ważniejszy uważa kolor u siebie w mieszkaniu niż kolor drzwi od zewnątrz. W sumie osoba 1 ma bardzo klarowny system wartości: woli biel od czerwieni, toleruje wybór dokonany przez drugą osobę w jej przestrzeni prywatnej, oraz swoją przestrzeń prywatną uważa za ważniejszą od przestrzeni wspólnej.

Opisana wyżej relacja jest tylko jedną z ogromnej liczby relacji preferencji, jakie można określić w zbiorze $X=\{x_1,\ldots,x_{16}\}$. Liczba profili dwuwymiarowych (n=2) jest jeszcze większa. Z twierdzenia Arrowa wiemy, że nie istnieje demokratyczna (tzn. spełniająca podane wyżej postulaty) reguła wyznaczania preferencji zbiorowych.

W cywilizacji zachodniej z pojęciem *liberalnej* demokracji kojarzona jest nie tylko idea suwerenności ludu, lecz także zasada respektowania praw jednostki. Konserwatyści od dawna przeczuwali, że wolność jednostki może być trudna do pogodzenia z poszanowaniem woli powszechnej, ale dopiero odkrycie przez Amartyę Sena kolejnego paradoksu potwierdziło te intuicje (w 1998 r. Sen dostał nagrodę Nobla z ekonomii, jednak w uzasadnieniu na pierwszym miejscu wskazano inne jego prace).

Sen zachował konceptualizację problemu pochodzącą od Arrowa, zmodyfikował wszakże układ postulatów nałożonych na funkcję społecznego dobrobytu. Do postulatu nieograniczoności dziedziny (czyli postulatu swobody indywidualnego wartościowania) i postulatu demokracji Pareto (czyli poszanowania jednomyślności) dodał trzeci postulat oddający jego zdaniem istotę liberalizmu. Otóż każda jednostka musi mieć prawo decydowania co jest dla niej lepsze w pewnym zakresie opcji (a więc np. zdecydować czy pomalować własne mieszkanie na biało czy na czerwono) a grupa powinna uszanować ten wybór, tzn. preferencję indywidualną danej jednostki przyjąć jako preferencję grupową. Formalnie postulat ten zapisuje się następująco.

Postulat liberalizmu Sena (poszanowania suwerenności jednostki)

Dla każdego $i=1,\ldots,n$ istnieją w X dwie różne opcje x i y takie, że zbiór $\{i\}$ jest rozstrzygający ze względu na funkcję społecznego dobrobytu F dla x przeciw y i dla y przeciw x.

Zauważmy, że postulat Sena wyklucza dyktaturę, bo dyktator to osoba, która rozstrzyga *każdy* dylemat $\{x,y\}$. Osoba i jest „panem", lecz tylko dla *pewnej* pary opcji, a mianowicie dla dowolnego profilu $(R_1,\ldots,R_n)$, to osoba i wyłącznie decyduje o tym czy grupa poprzez relację $R=F(R_1,\ldots,R_n)$ uzna x za lepsze od y, czy y za lepsze od x; jeśli xP_iy, to xPy (choćby dla każdego j różnego od i było yP_jx), jeśli zaś yP_ix, to yPx. Tylko indyferencja osoby i-tej (xI_iy) umożliwia grupie uwzględnienie preferencji innych osób.

Paradoks Sena

Niepusty podzbiór Y zbioru X nazwijmy *sferą wolności decydenta i ze względu na funkcję F* jeśli dla każdych dwu różnych elementów y i y' w Y zbiór $\{i\}$ jest rozstrzygający ze względu na F dla y przeciw y' i dla y' przeciw y. Łatwo wykazać, że jeśli funkcja społecznego wyboru ma nieograniczoną dziedzinę, wówczas sfery wolności dwu różnych osób mogą mieć co najwyżej jedną opcję wspólną. Niech Y i Y' będą sferami wolności osoby i oraz osoby j. Przypuśćmy, że $Y \cap Y'$ zawiera dwie różne opcje x i y. Założenie, że wszystkie profile są dopuszczalne, pozwala utworzyć profil taki, że xP_iy oraz yP_jx. Ponieważ $\{i\}$ jest rozstrzygający dla x przeciw y, a $\{j\}$ rozstrzygający dla y przeciw x, otrzymujemy dwa sprzeczne warunki xPy i yPx.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 (Sena)

Postulat nieograniczoności dziedziny, postulat demokracji Pareto i postulat liberalizmu Sena są sprzeczne.

Dowód twierdzenia Sena jest znacznie prostszy od dowodu twierdzenia Arrowa. Niech i oraz j oznaczają dwie różne osoby ($n \geq 2$), a Y i Y' ich sfery wolności. Z postulatu nieograniczoności dziedziny wynika, jak wyżej udowodniliśmy, że zbiory te mogą mieć co najwyżej jeden element wspólny. Możliwe są zatem dwie sytuacje: (1) $Y \cap Y' = \{x\}$ dla pewnego x; (2) $Y \cap Y' = \varnothing$. Pokażemy, że w obu przypadkach z trzech postulatów dają się wyprowadzić dwa zdania sprzeczne.

Rozważmy najpierw przypadek (1). Postulat liberalizmu Sena oznacza, że zbiory Y i Y' mają co najmniej po 2 elementy, a zatem istnieją $y \in Y - \{x\}$ i $y' \in Y' - \{x\}$. Postulat nieograniczoności dziedziny pozwala skonstruować profil preferencji indywidualnych taki, że

j	$\{h \neq j\}$
y	x
y'	y
x	y'

W profilu tym dla każdego $h \neq j$ relacja preferencji ścisłej P_h tak samo porządkuje elementy zbioru $\{x,y,y'\}$. W szczególności $i \neq j$, a więc xP_iy, a stąd xPy, jako że $\{i\}$ jest zbiorem rozstrzygającym dla x przeciw y. Podobnie, ponieważ $\{j\}$ jest zbiorem rozstrzygającym dla y' przeciw x, $y'P_jx$ implikuje $y'Px$. Zauważmy teraz, że dla *każdego* $h=1,\dots,n$ mamy yP_hy', a zatem yPy' na mocy warunku Pareto. Z xPy i yPy' wynika xPy' (P jest relacją przechodnią), co przeczy wyprowadzonemu wcześniej warunkowi $y'Px$.

Rozważmy teraz przypadek (2), w którym zbiory Y i Y' są rozłączne. Niech $\{x,y\}$ i $\{x',y'\}$ będą parami różnych opcji w Y i Y'. Skonstruujemy profil indywidualnych preferencji, w którym jak poprzednio wystąpią dwa uporządkowania, tym razem zbioru 4 opcji $\{x,y,x',y'\}$, jedno dla osoby j, a drugie wspólne dla pozostałych osób, w tym osoby i.

j	$\{h \neq j\}$
y	x'
y'	x
x'	y
x	y'

Ponieważ $\{i\}$ jest zbiorem rozstrzygającym dla x przeciw y, a $\{j\}$ dla y' przeciw x', grupowa relacja P odpowiadająca temu profilowi spełnia warunki xPy i $y'Px'$. Z uwagi na to, że dla każdego h mamy $x'P_hx$ oraz yP_hy', możemy zastosować postulat Pareto, otrzymując $x'Px$ i yPy'. Dwukrotnie skorzystamy teraz z przechodniości relacji P: Najpierw z xPy i yPy' otrzymujemy xPy', a następnie z tego ostatniego warunku oraz warunku $y'Px'$ dostajemy warunek xPx', sprzeczny z wyprowadzonym wcześniej warunkiem $x'Px$. Dowód twierdzenia Sena został tym samym zakończony.

Próby usunięcia paradoksu Sena

Jeśli X jest zbiorem dwuelementowym, czyli $X=\{x,y\}$, wówczas sam postulat liberalizmu generuje sprzeczność. Jeśli dylemat $\{x,y\}$ stanowi sferę wolności osoby 1, to nie może stanowić sfery wolności osoby 2. Grupie, która wolałaby uniknąć przyznania na stałe jednemu swojemu członkowi uprawnień dyktatorskich, pozostaje rozstrzyganie ewentualnych sporów przez losowanie, „sąd boży", bądź pojedynek między dwiema osobami, z których pierwsza uważa x za lepsze od y, a druga y za lepsze od x.

Wszelako, jak pokazaliśmy na przykładzie, zbiór X zazwyczaj ma więcej niż dwie opcje. W takiej sytuacji celowa wydaje się rozbudowa teorii poprzez wprowadzenie jakiejś struktury w zbiorze alternatyw społecznych, który w twierdzeniu Sena pozostaje bliżej niesprecyzowany.

Załóżmy znowu dla uproszczenia, że n=2. Dla każdej opcji $x \in X$ niech $a_1(x)$ oznacza aspekt stanu rzeczy x ważny dla osoby 1, zaś $a_2(x)$ aspekt ważny dla osoby 2. Będziemy mówić, że opcje *x i y należą do tej samej sfery osobistej osoby 1*, jeśli $a_2(x)=a_2(y)$. Inaczej mówiąc stany rzeczy x i y z punktu widzenia osoby 2 niczym się nie różnią, a wobec tego różnica między nimi może mieć znaczenie tylko dla osoby 1. Tak zdefiniowana relacja jest relacją równoważnościową. Dzieli ona zbiór X na parami rozłączne podzbiory zwane *sferami osobistymi* osoby 1. Podobnie, za pomocą warunku $a_1(x)=a_1(y)$ definiuje się przynależność opcji x i y do sfery osobistej osoby 2.

Zilustrujmy wprowadzone pojęcia na prostym przykładzie. Niech osoby 1 i 2 oznaczają męża i żonę planujących sposób spędzenia wakacji. Załóżmy, że dla każdej osoby liczy się jedynie czy ona sama zostanie w domu (D) czy wyjedzie na wczasy (W). Zbiór X określimy jako układ 4 opcji: $x_1=(D,D)$ (oboje zostają w domu); $x_2=(D,W)$ (mąż zostaje w domu, żona jedzie na wczasy); $x_3=(W,D)$ (mąż jedzie na wczasy, żona zostaje w domu); $x_4=(W,W)$ (oboje wyjeżdżają). Ponieważ $a_2(x_1)=a_2(x_3)=D$, opcje x_1 i x_3 należą do sfery osobistej męża. Drugą sferę osobistą męża tworzą opcje x_2 i x_4. Żona ma też dwie sfery osobiste: $\{x_1,x_2\}$ i $\{x_3,x_4\}$.

Dla liberała jest oczywiste, że sfera osobista jednostki powinna być jej sferą wolności, tzn. *każdy* wybór dokonany przez osobę 1 (2) między opcjami należącymi do jej sfery osobistej powinien być uszanowany przez grupę. Rozważmy następujący profil preferencji

R_1 (mąż)	R_2 (żona)
$x_3=(W,D)$	$x_4=(W,W)$
$x_2=(D,W)$	$x_3=(W,D)$
$x_4=(W,W)$	$x_2=(D,W)$
$x_1=(D,D)$	$x_1=(D,D)$

Mąż wolałby wyjechać sam, a jeśli to niemożliwe zostać w domu bez żony, wspólny wyjazd ceni w trzeciej kolejności, a zostanie razem w domu uważa za najgorszą dla siebie opcję. System wartości męża wyraża formuła: lepiej wakacje spędzić bez żony niż z żoną, lepiej wyjechać niż zostać w domu. System wartości żony jest bardziej skomplikowany. Ceni sobie ona wspólny wyjazd z mężem, uważa wyjazd za lepszy od zostania w domu tak dla siebie jak i dla męża, wszelako jeśli wyjazd tylko jednej osoby jest możliwy, zrzeka się tego przywileju na rzecz męża.

Niech P oznacza grupową relację preferencji ścisłej podyktowaną przez regułę F dla profilu (R_1,R_2). Jeśli reguła F spełnia postulat Pareto, relacja P powinna odzwierciedlać każdy przypadek zgodności preferencji męża i żony. Mąż i żona zgodnie uznają opcję x_1 za gorszą od pozostałych, a zatem dla pary powinno być: x_2Px_1, x_3Px_1, x_4Px_1. Ponadto małżonkowie zgadzają się, że x_3 jest lepsze od x_2, a stąd x_3Px_2. W pozostałych parach opcji $\{x_2,x_4\}$ i $\{x_3,x_4\}$ ma miejsce konflikt preferencji, mamy mianowicie $x_2P_1x_4$ (mąż) i $x_4P_2x_2$ (żona), a także $x_3P_1x_4$ (mąż) i $x_4P_2x_3$ (żona). W obu przypadkach idzie o to, że mąż chce spędzić wakacje bez żony, a żona woli mu towarzyszyć, gdy to możliwe.

Czy relacja P daje jakieś rozwiązanie opisanego wyżej konfliktu? Dylemat $\{x_2,x_4\}$ stanowi sferę osobistą męża (osoby 1), a zatem para małżeńska powinna uznać za swoją jego preferencję, tzn.

x_2Px_4. Z kolei dylemat $\{x_3,x_4\}$ stanowi sferę osobistą żony (osoby 2), a więc tym razem para powinna uszanować wybór żony, tzn. x_4Px_3. Obie konsekwencje postulatu Sena, czyli x_2Px_4 i x_4Px_3 prowadzą do wniosku, że x_2Px_3 sprzecznego z wnioskiem wyprowadzonym z postulatu Pareto, czyli x_3Px_2.

Tak więc wprowadzenie sfer osobistych nie usuwa sprzeczności. Paradoks pojawia się nieuchronnie, jeśli dopuszczone zostaną wszelkie teoretycznie możliwe profile preferencji indywidualnych. Okazuje się, że liberalna demokracja jest systemem polityczno-prawnym, który może funkcjonować tylko na gruncie określonego, *liberalnego*, systemu wartości podzielanego przez członków grupy. Poszanowanie wolności jednostki daje się pogodzić z suwerennością grupy wtedy, gdy jej członkowie mają liberalne relacje preferencji.

Relację preferencji R_i osoby i nazwiemy *liberalną*, jeśli dla dowolnej osoby $j \neq i$ i dowolnych dwu różnych opcji x i y należących do sfery osobistej osoby j mamy xI_iy. Liberałowi powinno być zatem obojętne, którą z dwu opcji wybrać, gdy opcje te należą do sfery osobistej jego bliźniego. W podanym wyżej przykładzie ani relacja preferencji męża ani żony nie spełnia tego warunku. Żonie nie jest wszystko jedno czy mąż wyjedzie na wczasy czy zostanie w domu, gdy ona sama zostaje w domu. Przekonana, że wyjazd zawsze jest lepszy niż zostanie w domu, chciałaby męża uszczęśliwić. Mężowi nie jest wszystko jedno co zrobi żona, gdy on zdecyduje się zostać w domu, z tym że jemu chodzi o to by uszczęśliwić siebie, pozbywając się żony. Przy takiej interpretacji systemu wartości męża opisany wyżej przykład nie całkiem dobrze nadaje się do ilustracji pojęcia sfery osobistej, gdyż aspekty indywidualne alternatyw społecznych zostały określone w sposób ignorujący znaczenie dla męża i żoną samej interakcji społecznej między nimi. Można jednak powtórzyć rozumowanie bez założenia, że (W,W) oznacza wspólne wczasy.

Wielowymiarowe określenie zbioru alternatyw społecznych (wymiary=aspekty zdarzeń obchodzące poszczególnych decydentów) oraz rezygnacja z postulatu nieograniczoności dziedziny na rzecz dopuszczenia wyłącznie preferencji liberalnych umożliwiają usunięcie paradoksu Sena. O innych formalnych próbach uporania się z problemem pogodzenia liberalizmu i demokracji, jakie podejmowano na gruncie teorii wyboru społecznego po ukazaniu się pracy Sena *The Impossibility of a Paretian liberal* („Journal of Political Economy" 78 (1970): 152-157), traktuje obszernie monografia Grzegorza Lissowskiego *Prawa indywidualne a wybór społeczny* (Warszawa 1992: Wydawnictwo IFiS PAN).